
Aufgabe 1 (Der konjugierte Locus)

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\sec(\pi) \leq 0$ für alle $p \in M$ und alle $\pi \subset T_pM$. Zeigen Sie: Der konjugierte Locus $C(p)$ zu jedem Punkt $p \in M$ ist leer.

Aufgabe 2 (Metrik-Vergleichstheorem)

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\sec \leq C$ und (N, h) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung C und $dim(N) = dim(M)$. Seien $\phi : U \to B_\epsilon(0)$ normale Koordinaten auf (M, g) und $\psi : V \to B_\epsilon(0)$ normale Koordinaten auf (N, h). Zeigen Sie: $\tilde{g}(X, X) \geq \tilde{h}(X, X)$ für alle $X \in TB_\epsilon(0)$, wobei $\tilde{g} = \phi_* g$ und $\tilde{h} = \phi_* h$.

Aufgabe 3 (Keine Konjugierten Punkte auf $S^1 \times \mathbb{R}$)

Sei $S^1 \times \mathbb{R}$ mit der Standardmetrik versehen. Man zeige: für beliebige $p \in S^1 \times \mathbb{R}$ existierten keine konjugierten Punkte (d.h. für jede Geodäte $\gamma : [0, l] \to M$ mit $\gamma(0) = p$ ist $\gamma(s)$ kein konjugierter Punkt).

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, den 14.07.2008 bis 9:15.