Aufgabe 1 (Jacobifelder auf 2-dim. Riemannschen Mannigfaltigkeiten)

Sei (M^2, g) eine 2-dim Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\gamma : [0, l] \to M$ eine Geodäte und $Scal$ die Sklarkrümmung. Zeigen Sie: Falls J ein normales Jacobifeld längs γ ist, mit $J(0) = 0$ und $J'(0) \neq 0$, dann gilt:

$$\frac{d^2|J|}{ds^2}(s) = -\frac{1}{2}Scal(\gamma(s))|J|,$$

solange $|J(s)| > 0$ ist.

Aufgabe 2 (Jacobifelder auf 2-dim. Riemannschen Mannigfaltigkeiten Teil 2)

Sei (M^2, g) eine 2-dim Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\gamma : [0, l] \to M$ eine Geodäte und $Scal$ die Sklarkrümmung . Es sei $-2 \leq Scal \leq c_0^2$ auf M. Zeigen Sie, dass für ein Jacobifeld mit $J(0) = 0$ und $J'(0) \neq 0$ gilt:

$$|J(s)| \leq \sinh(s)|J'(0)|_g,$$

sofern $0 \leq s \leq \pi R_0$, wobei $R_0^2 = \frac{2}{c_0^2}$ falls $c_0^2 > 0$ ist.
Zeigen Sie weiter, dass $|J(s)| \leq \sinh(s)|J'(0)|_g$ für alle s gilt, falls $-2 \leq Scal \leq 0$ auf M ist.

Aufgabe 3 (Cartan-Hadamard Mannigfaltigkeiten)

Sei (M, g) eine einfach-zusammenhängende, zusammenhängende, vollständige Mannigfaltigkeit mit $\sec \leq -1$ überall. Man Zeige, dass

$$vol({}^gB_r(x)) \geq vol({}^hB_r(p))$$

wobei $vol({}^hB_r(p))$ das Volumen (bezüglich h) eines Geodätischen Balls mit Radius $r > 0$ im Hyperbolischen Raum ist (h ist die Standard Metrik, p beliebig), und $vol({}^gB_r(x))$ das Volumen (bezüglich g) eines Geodätischen Balls mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt x ist.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, den 21.07.2008 bis 9:15.