Übungsaufgaben zur Differentialgeometrie II — SS 08, Serie 2
Dr. M. Simon, — 28. April 2008

Aufgabe 1 *Existenz des Levi-Cevita Zusammenhangs*

Sei (M, g) eine Riemmansche Mannigfaltigkeit (M und g C^∞). Sei ∇ lokal durch

$$\nabla_X Y := (X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(Y^k) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k)\frac{\partial}{\partial x^k},$$

wobei

$$\Gamma_{ij}^k = (1/2)g^{kl}(\frac{\partial}{\partial x^i}g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j}g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l}g_{ij})$$

(wie in der Vorlesung) und X, Y glatte Vektorfelder sind. Man Zeige:

- ∇ erfülle (lokal) (4) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ und (5) $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.
- ∇ ist global wohl definiert und C^∞ (insbesondere ∇ hängt nicht von der Wahl einer Karte ab in dieser lokalen Darstellung).

Aufgabe 2 *Eigenschaften von* ∇^M

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, und ∇^M wie in der Vorlesung. Mann Zeige:

(a) $\nabla_X^M Y - \nabla_Y^M X = [X, Y]$.

(b) $X(\langle Y, Z\rangle) = \langle \nabla_X^M Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X^M Z\rangle$.

Aufgabe 3*Eindeutigkeit von der Kovarianten Ableitung längs eine Kurve*
Sei $\gamma : I \to M$ eine glatte Kurve. Seien $S : TM(\gamma) \to TM(\gamma)$ und $R : TM(\gamma) \to TM(\gamma)$ zwei Operatoren die Bedingungen (i),(ii),(iii) von Bemerkung 1.17 a) erfüllen. D.h.:

- $R(X + Y)(t) = R(X)(t) + R(Y)(t)$
- $R(fX)(t) = f'(t)X(t) + f(t)R(X)(t)$
- Falls $X(t) = Z(\gamma(t))$ für eine C^∞ V.Feld Z, dann gilt $R(X)(t) = \nabla_{\gamma'(t)}Z$

für alle $X, Y \in TM(\gamma), t \in I$. Man Zeige: $R = S$. Hier ist $TM(\gamma)$ die Menge von C^∞ Vektorfelder längs γ.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 05.05.2008 bis 9:15.