Notation: ${}^{\phi}\Gamma(g)_{ij}^{k}$ sind die Christoffel Symbole des Levi-Cevita Zusammenhangs der Metrik g bezüglich der Karte ϕ (d.h. bezüglich des Lokalen Basisfelds ${}^{\phi}\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, {}^{\phi}\frac{\partial}{\partial x^n}$).

Aufgabe 1 *Christoffel Symbole sind Koordinaten abhängig (I)*

Sei I die Standard Riemannsche Metrik auf $\mathbb{R}^n$, $I(X,Y) = \langle X, Y\rangle_{\mathbb{R}^n}$ und ∇ der Levi-Cevita Zusammenhang. Man Zeige:

- Bezüglich den Standard Koordinaten $\phi(x) = x$, sind ${}^{\phi}\Gamma(I)_{ij}^{k} = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^n$.
- Es existiert eine Karte $\psi : U \to \psi(U)$, so dass ${}^{\psi}\Gamma(I)_{ij}^{k}$ NICHT identisch null sind.
- Sei (M, g) eine differenzierbare Riemmansche Mannigfaltigkeit, und $\phi : U \to \phi(U)$ eine Karte auf M mit ${}^{\phi}\Gamma(g)_{ij}^{k} = 0$ auf ganz U. Man Zeige: es existiert eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ und eine Isometrie $L : (V, I) \to (U, g)$ (d.h. $L : V \to U$ ist ein Diffeo. und $L^* g = I$).

Aufgabe 2 *Christoffel Symbole sind Koordinaten abhängig (II)*

Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit, und g eine glatte Riemannsche Metrik auf M und sei $\phi : U \to \phi(U)$ eine Karte.

- Definiere die Karte $\tilde{\phi} : U \to c\phi(U)$ durch $\tilde{\phi}(x) = c\phi(x)$ $(c \neq 0)$. Man Zeige:
$$\frac{1}{c}{}^{\phi}\Gamma(g)_{ij}^{k} = {}^{\tilde{\phi}}\Gamma(g)_{ij}^{k}.$$
- $T(p) : (T_pM)^* \times T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ durch $T(p)(\omega, v, w) = {}^{\phi}\Gamma(g)_{jk}^{i}({}^{\phi}\omega_i)({}^{\phi}v^j)({}^{\phi}w^k)$ ist NICHT wohldefiniert (genauer gesagt, es existieren andere Koordinaten $\psi : V \to \psi(V)$ mit $V \subset U$, und Vektoren v, w und eine eins Form ω, so dass ${}^{\phi}\Gamma(g)_{jk}^{i}({}^{\phi}\omega_i)({}^{\phi}v^j)({}^{\phi}w^k)$ NICHT gleich ${}^{\psi}\Gamma(g)_{jk}^{i}({}^{\psi}\omega_i)({}^{\psi}v^j)({}^{\psi}w^k)$ ist.

  Man sagt: 'Die Christoffel Symbole sind KEIN Tensor.'

Aufgabe 3 Sei M^n glatt, und g, h Riemmansche Metriken auf M. Sei $T(p) : (T_pM)^* \times T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ lokal durch

$$T(p)(\omega, v, w) = ({}^{\phi}\Gamma(g)_{jk}^{i} - {}^{\phi}\Gamma(h)_{jk}^{i}){}^{\phi}\omega_i{}^{\phi}v^j{}^{\phi}w^k$$

definiert. Zeigen Sie, dass $T(p)(\omega, v, w)$ wohl definiert ist (d.h. hängt nicht von der Wahl der Koordinaten ab). Dadurch ist T auf ganz M glatt und wohldefiniert. Man sagt:'Die Differenz zwei Christoffel Symbolen ist ein Tensor'.