Übungsaufgaben zur Differentialgeometrie II — SS 08, Serie 4
Dr. M. Simon — 19. Mai 2008

Aufgabe 1 (*Distanzfunktionen*)

Eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $\|\mathrm{grad}_\mathrm{g} f\|_g \equiv 1$ heißt Distanzfunktion. Zeigen Sie:

(a) Integralkurven von $\mathrm{grad}_\mathrm{g} f$ sind Geodätische.

(b) Für eine stückweise reguläre C^1-Kurve c von p nach q gilt $L_g(c) \geq f(q) - f(p)$, mit Gleichheit genau dann, wenn c Integralkurve von $\mathrm{grad}_\mathrm{g} f$ ist.

Aufgabe 2 *Hopf-Rinow*

Sei (M, g) eine Mannigfaltigkeit, und $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit mit der induzierten Riemmanschen Metrik $h = i^*g$ versehen ($i : N \to M$ die Inklusion). Zeigen Sie: Ist (M, g) vollständig und N zusammenhängend, abgeschlossen, so ist (N, h) vollständig.

Aufgabe 3 *Polarkoordinaten*

Sei (M, g) eine Riem. Mannigfaltikeit und $f : (0, s) \times S_p \to M$

$$f(r, \omega) = \exp_p(r\omega),$$

wohldefiniert, wobei $S_p = \{v \in T_pM : ||v||_g = 1\}$. Man Zeige:

$$f^*g|_{(r_0,\omega_0)} = dr^2|_{r_0} \oplus r_0^2 h|_{(r_0,\omega_0)},$$

wobei dr^2 die Standard Metrik auf $\mathbb{R}$ ist, und $h|_{(r_0,\omega_0)}$ eine Riem. Metrik auf S_p ist, genauer gilt für $\psi, \eta \in T_{\omega_0}S_p$:

$$h|_{(r_0,\omega_0)}(\psi, \eta) = g(D\exp_p(r_0\omega_0)(\psi), D\exp_p(r_0\omega_0)(\eta)).$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 26.05.2008 bis 9:15.