Aufgabe 1 *Unterhalbstetigkeit der Lebendauer*
Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für $v \in TM$ sei $\gamma : [0, \rho_v) \to M$ die maximale nach rechts definierte Geodätische mit $\gamma'(0) = v$ (die *Lebensdauer* $\rho_v \in (0, \infty]$ *der Geodäte durch* v hängt von v ab). Man zeige: die Lebensdauer ist unterhalbstetig. D.h. Für $v_i \in TM$ mit $v_i \to v$ gilt

$$\rho_v \leq \liminf_{i\to\infty} \rho_{v_i}.$$

Konstruieren Sie einen Beispiel in dem $\rho_v < \liminf_{i\to\infty} \rho_{v_i}$ gilt.

Aufgabe 2 *Hopf-Rinow*
Sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie: (3) impliziert (4) aus der Vorlesung, wobei (3) und (4) sind:

(3) Jede abgeschlossene, beschränkte Menge in (M, g) ist kompakt.

(4) $(M, {}^g d)$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

Aufgabe 3 *Hopf-Rinow II*
Sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie: (5) impliziert (3) ist FALSCH, wobei (3) wie oben und (5) ist:

(5) zu $p, q \in M$ existiert eine Kürzeste von p nach q.