Aufgabe 1 *Blätterung durch horizontale Räume*

Sei $\pi : (N^n, h) \to (M^m, g)$ eine Riemannsche Submersion, M, N zusammenhängend und N vollständig. Sei $p \in N$ gegeben. Zeigen Sie: Es existiert eine Umgebung U von p, so dass $U = \cup_{p_\alpha \in \pi^{-1}(\pi(p))} R_\alpha$, wobei R_α disjunkte Untermannigfaltigkeiten der Dimension $k = n - m$ sind, die jeweils im Punkt p_α *horizontal* sind. Eine Untermannigfaltigkeit R von N ist im Punkt q *horizontal*, wenn alle Tangentialvektoren $w_q \in T_qR \subset T_qN$ horizontal sind (d.h. $w_q \in H(q) \subset T_qN$). *Hinweis: Benutzen die Exponentialfunktion eingeschränkt auf $H(p_\alpha)$ um die Untermannigfaltigkeiten zu konstruieren.*

Aufgabe 2 *Lieklammer zweier horizontaler Lifte*

Sei $\pi : (N^n, h) \to (M^m, g)$ eine Riemannsche Submersion. Seien X, Y glatte Vektorfelder auf M und $\tilde{X}, \tilde{Y}$ die horizontalen Lifte davon (siehe Vorlesung). Zeigen Sie:

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] - \widetilde{[X, Y]}$$

ist vertikal.

Aufgabe 3 *Maximale nach rechts definierte Geodätischen*
Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, und $\gamma : [0, b) \to M$ eine maximale nach rechts definierte Geodätische mit $b < \infty$. Man zeige: für alle $K \subset M$ kompakt, existiert es ein $t = t(K) < b$, so dass $\gamma(t) \notin K$ für alee $t \in (t(K), b)$. Man sagt: *die Geodätische verlässt jedes Kompaktum.*

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer bungsgruppe auf jedes Lsungsblatt. Abgabe ist am Montag, 09.06.2008 bis 9:15.