**Aufgabe 1** *Blätterung durch horizontale Räume*

Sei $\pi : (N^n, h) \to (M^m, g)$ eine Riemannsche Submersion, $M, N$ zusammenhängend und $N$ vollständig. Sei $p \in N$ gegeben. Zeigen Sie: Es existiert eine Umgebung $U$ von $p$, so dass $U = \cup_{p_\alpha \in \pi^{-1}(\pi(p))} R_\alpha$, wobei $R_\alpha$ disjunkte Untermannigfaltigkeiten der Dimension $k = n - m$ sind, die jeweils im Punkt $p_\alpha$ *horizontal* sind. Eine Untermannigfaltigkeit $R$ von $N$ ist im Punkt $q$ *horizontal*, wenn alle Tangentialvektoren $w_q \in T_q R \subset T_q N$ horizontal sind (d.h. $w_q \in H(q) \subset T_q N$). *Hinweis: Benutzen die Exponentialfunktion eingeschränkt auf $H(p_\alpha)$ um die Untermannigfaltigkeiten zu konstruieren.*

**Aufgabe 2** *Lieklammer zweier horizontaler Lifte*

Sei $\pi : (N^n, h) \to (M^m, g)$ eine Riemannsche Submersion. Seien $X, Y$ glatte Vektorfelder auf $M$ und $\tilde{X}, \tilde{Y}$ die horizontalen Lifte davon (siehe Vorlesung). Zeigen Sie:

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] - \widetilde{[X, Y]}$$

ist vertikal.

**Aufgabe 3** *Maximale nach rechts definierte Geodätischen*
Sei $(M, g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, und $\gamma : [0, b) \to M$ eine maximale nach rechts definierte Geodätische mit $b < \infty$. Man zeige: für alle $K \subset M$ kompakt, existiert es ein $t = t(K) < b$, so dass $\gamma(t) \notin K$ für alee $t \in (t(K), b)$. Man sagt: *die Geodätische verlässt jedes Kompaktum.*

*Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer bzw. der Tag Ihrer bungsgruppe auf jedes Lsungsblatt. Abgabe ist am Montag, 09.06.2008 bis 9:15.*