Aufgabe 1 (*S^{n-1} ist Liegruppenquotient*)
Sei $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | A \cdot A^t = Id\}$. Auf $SO(n) = \{A \in O(n) | det(A) = 1\}$ operiert die Untergruppe $H = \{h \in SO(n) : he_n = e_n\}$ von rechts durch

$$SO(n) \times H \to SO(n),\ \phi(g, h) = g \cdot h$$

(Matrizenmultiplikation). Zeigen Sie: $SO(n)/H$ ist diffeomorph zu S^{n-1}.

Aufgabe 2 (*Irrationale Translationen*)
Betrachten Sie die Operation

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ t \cdot (x, y) = (x + t, y + bt) \quad \text{für } b \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass dies für $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ eine glatte und freie Operation auf dem Torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ induziert, dass aber der Quotientenraum nicht Hausdorffsch ist.

Aufgabe 3 (*Abstand in $\mathbb{C}P^n$*)
Berechnen Sie für $z, w \in S^{2n+1}$ den Riemannschen Abstand $\mathrm{d}(p, q)$ der Punkte $p = \pi(z)$ und $q = \pi(w)$ in $\mathbb{C}P^n$.