

Aufgabe 1 (*Total geodätische Untermannigfaltigkeiten*)

Sei $f : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$ eine isometrische Einbettung ($f^*h = g$). Dann heißt $f(M)$ *total geodätisch*, falls die zweite Fundamentalform identisch null ist. Man zeige:
 f ist total geodätisch $\Leftrightarrow$ für jede Geodäte $\gamma : I \rightarrow M$ gilt, dass $f \circ \gamma$ eine Geodäte in N ist.

Aufgabe 2 (*Laplace und die zweite Fundamentalform*)

Sei $f : (M^n, g) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, h)$ eine isometrische Immersion. Man zeige:

$$\Delta_g f^i = -H \cdot \nu^i$$

für alle $i \in \{1, \dots, n+1\}$, wobei H die *Mittlere Krümmung* und ν ein lokal normales Vektorfeld mit Länge eins ist. Hierbei ist für eine C^∞ Funktion $l : M \rightarrow \mathbb{R}$ (in Koordinaten)

$$\Delta_g l = g^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial l}{\partial x^j} - \Gamma(g)_{ij}^k \frac{\partial l}{\partial x^k} \right)$$

Bemerkung: in den Anwesenheitsübungen hat man gesehen, dass $H : M \rightarrow \mathbb{R}$, $H(x) := \sum_{i=1}^m (A(x)(\tau_i, \tau_i), \nu)$ eine wohldefinierte C^∞ -Funktion ist, wobei $\tau_i(x)$ eine beliebige ONBasis in $T_x M$ ist.

Aufgabe 3 (*Clifford-Torus*)

Berechnen Sie die zweite Fundamentalform der induzierten Metrik für

$$f : \mathbb{R}^2 / (2\pi\mathbb{Z})^2 \rightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4, f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{ix}, e^{iy}).$$

Zeigen Sie, dass f eine Minimalfläche in $\mathbb{S}^3$ ist, das heißt $H \equiv 0$.