Aufgabe 1 (div(Ricci $-\frac{1}{2}$S) $= 0$)
Zeigen Sie:

$$\sum_{i=1}^{n}(\nabla \mathrm{Ricci})(e_i, e_i, V) = \frac{1}{2}dS(V),$$

wobei S die Skalarkrümmung bezeichnet, für alle $V \in T_pM$ und alle orthonormalen Basen $(e_i)_{i=1,,,,n}$ von T_pM.

Aufgabe 2 (*Diagonaler Krümmungsoperator*)
Sei (M^3, g) eine drei-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Sei $\mathcal{R} : \Lambda^2(T_pM) \to \Lambda^2(T_pM)$ der Krümmungsoperator: für $\alpha = \sum_{i<j} \alpha_{ij} dx^i \wedge dx^j$, ist

$$\mathcal{R}(\alpha) = \sum_{k<l}\sum_{i<j} R_{ijlk}\alpha^{ij} dx^k \wedge dx^l.$$

Sei v_1, v_2, v_3 eine orthonormale Basis für T_pM, und $\phi^1 = {v_1}^* \wedge {v_2}^*$, $\phi^2 = {v_1}^* \wedge {v_3}^*$, $\phi^3 = {v_2}^* \wedge {v_3}^*$, wobei v^* dual zu v ist. Zeigen Sie: Falls

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\{\phi^1, \phi^2, \phi^3\}$ ist, dann gilt

$$\mathrm{Ricci} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma+\beta \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\{v^1, v^2, v^3\}$.

Aufgabe 3 (*Riemannscher Krümmungstensor für* $\mathbb{H}^n$)
Zeigen Sie: $(\mathbb{H}^n, g)$ hat konstante Schnittkrümmung -1, wobei $(\mathbb{H}^n, g)$ in Serie 1, Aufgabe 2 definiert ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 30.06.2008 bis 9:15.