Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in partielle Differentialgleichungen — WS 2013/2014, Serie 5
Prof. Dr. G. Wang — 18.11.2013
Dipl.-Math. E. Mäder

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Für $n = 2$ sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(\Omega)$. In Polarkoordinaten sei $u(r, \varphi) = u(r(x, y), \varphi(x, y))$ mit $(x, y) = re^{i\varphi}$. Zeigen Sie

$$\Delta u = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r u) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 u.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $n \geq 3$. Lösen Sie das Dirichletproblem für die Komplement der Kugel, d.h. sei $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > R\}$. Zu $\varphi \in C^0(\partial B_R)$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ ist gesucht

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \\ -\Delta u = 0 \text{ in } \Omega \\ u = \varphi \text{ auf } \partial B_R \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) = \gamma. \end{cases} \tag{1}$$

Hinweis. Betrachten Sie die (leicht modifizierte) Kelvintransformation $k : \Omega \to B_R \backslash \{0\}$

$$y := k(x) = \frac{R^2}{|x|^2}x \quad \textit{und} \quad v(x) = |x|^{2-n}\left(u(k(x)) - \gamma\right).$$

Zunächst zeigen Sie mit dem Hebbarkeitssatz (Satz 3.22), dass u eine Lösung von (1) genau dann ist, wenn v eine Lösung von

$$\begin{cases} v \in C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B_R}) \\ -\Delta v = 0 \textit{ in } B_R \\ v = R^{2-n}(\varphi - \gamma) \in C^0(\partial B_R) \textit{ auf } \partial B_R \end{cases} \tag{2}$$

ist. Danach wenden Sie die Lösungsformel für (2) an und finden Sie die Lösungsformel für (1).

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien Ω ein beschänktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und messbare Funktion. Weiter sei $u_f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|x - y|)f(y)dy$ für $x \in \mathbb{R}^n$ das im Satz 3.2 definierte Newton-Potential.
(a) Zeigen Sie $u_f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\partial_{x_i} u_f(x) = \int_\Omega \partial_{x_i}\Phi(|x - y|)f(y)dy.$$

Bitte wenden Sie

(b) Weiter sei $f \in C^\alpha(\Omega)$ für ein $\alpha \in (0,1)$ und beschränkt. Zeigen Sie $u_f \in C^2(\Omega)$, $-\Delta u_f = f$.
Bemerkung: Man kann im Fall (b) sogar zeigen $\partial_i \partial_j u_f \in C^\alpha(\Omega)$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Sie $1 \le p < \infty$. Bestimmen Sie alle $\alpha > 0$, so dass die Funktion

$$u(x) = \frac{1}{1 + |x|^\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

zu $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ gehört. Geben Sie für diese Fälle die schwache Ableitung an.
(b) Bestimmen Sie alle $\beta > 0$, so dass die Funktion

$$u(x) = \frac{1}{|x|^\beta}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

zu $W^{1,1}(B_1(0))$ gehört.

Aufgabe 5 (Anwesenheitsaufgabe) (0 Punkte)

Gegeben seien ein reguläres Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Zeigen Sie die folgende Ungleichung: für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\int_\Omega |Du|^2 \le \varepsilon \int_\Omega (\Delta u)^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega u^2 dx.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 25.11., vor der Vorlesung**.