Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in partielle Differentialgleichungen — WS 2013/2014, Serie 6
Prof. Dr. G. Wang — 25.11.2013
Dipl.-Math. E. Mäder

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass eine Funktion u in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ schwach differenzierbar ist genau dann, wenn gilt: $\forall x_0 \in \Omega$ existiert eine Umgebung $U \subset \Omega$ von x_0 so dass U schwach differenzierbar in U ist.
Hinweis. Für "$\Longleftarrow$"benutzen Sie die Teilung der Eins.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien α, β zwei Multiindizes und $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Außerdem mögen die schwachen Ableitungen $D^\alpha u$ und $D^\beta u$ existieren. Zeigen Sie: Existiert eine der zwei schwachen Ableitungen $D^{\alpha+\beta}u$ oder $D^\alpha(D^\beta u)$, dann existieren beide und sind fast überall gleich in Ω.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein beschränkter Maßraum, d.h., $\mu(X) < \infty$, außdem nichttrivial, d.h., $\mu(X) > 0$, und für μ-messbare Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei

$$\Phi_p(f) := \begin{cases} \left(\frac{1}{\mu(X)} \int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} & \text{falls } \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: $p \mapsto \Phi_p(f)$ ist monoton nichtfallend und für $f \in L^\infty(X, \mu)$ zeigen Sie

a) $\|f\|_{L^\infty} = \lim\limits_{p\to\infty} \Phi_p(f) = \lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_{L^p}$.

b) Untersuchen Sie den Grenzwert von $\Phi_p(f)$ und
$$\left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \text{ für } p \to -\infty.$$

c) $\exp(\frac{1}{\mu(X)} \int_X \log|f|)d\mu(x) = \lim\limits_{p\to 0} \Phi_p(f)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Seien $I = (a, b)$. Zeigen Sie

$$[u]_{C^{1/2}([a,b])} \leq \|u'\|_{L^2(a,b)}, \quad \forall u \in W^{1,2}_0(a, b),$$

wobei $[u]_{C^{1/2}([a,b])} := \sup_{x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{1/2}}$. Schließen Sie hieraus, dass $W^{1,2}_0(a, b)$ stetig in $C^{1/2}([a, b])$ eingebettet ist.

Bitten wenden Sie

Aufgabe 5 (0 Punkte)

Es sei $u \in W^{2,1}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit $D^2 u = 0$. Zeigen Sie, dass u affin ist, d.h. $u(x) = a + bx$ mit $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 2.12., vor der Vorlesung**.