Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in partielle Differentialgleichungen — WS 2013/2014, Serie 7
Prof. Dr. G. Wang — 2.12.2013
Dipl.-Math. E. Mäder

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweisen Sie: Es existiert ein stetiger linearer Operator
$\gamma : W^{1,1}(B_1(0)) \to L^1(\partial B_1(0))$, so dass

$$u|_{\partial B_1(0)} = \gamma(u), \quad \forall u \in W^{1,1}(B_1(0)) \cap C^0(\overline{B_1(0)}).$$

Hinweis. Beweisen Sie die Behauptung zunächst für $u \in C^1(\overline{B_1(0)})$ mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes und wenden Sie anschließend ein Dichtheitsargument an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben seien ein beschränktes C^1-Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f \in L^2(\Omega)$. Eine Funktion $u \in H_0^2(\Omega)$ heißt eine schwache Lösung des Problem

$$\begin{cases} \Delta^2 u &= f, & \text{in } \Omega, \\ u &= 0, & \text{auf } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0, & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

falls für alle Testfunktionen $\varphi \in H_0^2(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega \Delta u \Delta \varphi dx = \int_\Omega f \varphi dx,$$

wobei ν das äußere Normalenvektorfeld von $\partial\Omega$ ist. Man beweise, dass zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $u \in H_0^2(\Omega)$ des Problem (1) existiert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $V = H_0^1(0,1)$, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ und $F : V \to \mathbb{R}$:

$$F(v) = \int_0^{\frac{1}{2}} (-1-4x)v(x)dx, \quad a(u,v) = \int_0^1 (1+x)u'(x)v'(x)dx.$$

(a) Man beweise, dass das Problem

$$a(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V$$

eine eindeutige Lösung $u \in V$ hat.

Bitten wenden Sie

(b) Man beweise, dass die Lösung durch

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\log 2}\log(1+x) + x^2 - x, & \text{falls } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4\log 2}\log(1+x) - \frac{1}{4}, & \text{falls } \frac{1}{2} \leq x < 1, \end{cases}$$

gegeben ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben seien ein Intervall $\Omega \subset \mathbb{R}$ eine Funktion $f \in L^2(\Omega)$. Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ die schwache Lösung des Problems $-u'' = f$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Man beweise, dass $u \in H^2(\Omega)$.

Aufgabe 5 (0 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Wir nennen $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Oberlösung für

$$\begin{cases} -\Delta u &= 0, & \text{in } \Omega, \\ u &= 0, & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

falls für alle *nichtnegativen* Testfunktionen $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ gilt:

$$u \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx \geq 0.$$

Man zeige, dass für solche schwachen Oberlösungen stets gilt:

$$u \geq 0, \text{ f. ü. in } \Omega.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 9.12., vor der Vorlesung**.