Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in partielle Differentialgleichungen — WS 2013/2014, Serie 8
Prof. Dr. G. Wang — 9.12.2013
Dipl.-Math. E. Mäder

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\Omega := (-1,1) \subset \mathbb{R}$ und $a_-, a_+ \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $a_- \neq a_+$. Berechnen Sie die schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ des Problems

$$\begin{aligned} -(au')' &= c \text{ in } \Omega \\ u(-1) = u(1) &= 0 \end{aligned}$$

für $c \in \mathbb{R}$ und

$$a(x) := \begin{cases} a_- & \text{, falls } -1 < x < 0 \\ a_+ & \text{, falls } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst $v := au'$ und zeigen Sie, dass $d \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $v = -cx + d$ fast überall in $(-1,1)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit C^1-Rand und äußerer Normale ν. Weiter seien $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}), b_i, c, f \in C^0(\overline{\Omega})$. Zeigen Sie: $u \in C^2(\overline{\Omega})$ löst das Neumann-Problem

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^n D_i(\sum_{j=1}^n a_{ij} D_j u) + \sum_{i=1}^n b_i D_i u + cu &= f \text{ in } \Omega \\ \langle \nu, (\sum_j a_{ij} D_j u)_{i=1,\dots,n} \rangle &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

genau dann, wenn für alle $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ gilt

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n D_i v \sum_{j=1}^n a_{ij} D_j u + v(\sum_{i=1}^n b_i D_i u + cu)\, dx = \int_\Omega vf\, dx.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Man beweies, dass die Funktion $\gamma : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\gamma(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\gamma_t - \Delta\gamma = 0$ ist. **Bitten wenden Sie**

(b) Sei $\alpha > 0$. Man zeige, dass

$$G(t,x) = \frac{1}{(1-4\alpha t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{\alpha|x|^2}{1-4\alpha t}}$$

auch eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung für $t < 1/4\alpha$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $n = 1$ und $u(t,x) = v(\frac{x}{\sqrt{t}})$, wobei $u : (0,T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar seien.

(a) Man zeige, dass $u_t = u_{xx}$ genau dann, wenn

$$v''(z) + \frac{z}{2} v'(z) = 0 \quad \text{für } z > 0. \tag{1}$$

(b) Man zeige, dass die allgemeine Lösung von (1)

$$v(z) = c_1 \int_0^z e^{-\frac{s^2}{4}} ds + c_2$$

lautet.

(c) Man leite $v(\frac{x}{\sqrt{t}})$ bzgl. x ab, um die Konstante c_1 zu bestimmen so dass u_x die eindimensionale Fundamenatallösung ist.

Aufgabe 5 (0 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein reguläres Gebiet und $u \in C^{1,2}((0,T) \times \Omega) \cap C^0([0,T] \times \overline{\Omega})$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \text{ in } (0,T) \times \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } (0,T) \times \partial\Omega \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Für die Funktion $f(t) := \int_\Omega u(t,x)^2 dx$ gilt $f'(t) \leq 0$ für alle $t \in (0,T)$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 16.12., vor der Vorlesung**.