Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in partielle Differentialgleichungen — WS 2013/2014, Serie 9
Prof. Dr. G. Wang — 16.12.2013
Dipl.-Math. E. Mäder

Aufgabe 1 (Anwesenheitsaufgabe) (0 Punkte)

Sei u eine glatte Lösung des Problems

$$u_t - \Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty).$$

(1) Man beweise, dass

$$u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$$

ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist für $\lambda \in \mathbb{R}$.
(2) Mit (1) beweise man, dass

$$v(x,t) = x \cdot Du(x,t) + 2tu_t(x,t)$$

eine weitere Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.
(3) Man zeige, dass die "Kelvin-Transformation"

$$v(x,t) = \frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} u(\frac{x}{t}, \frac{-1}{t})$$

auch eine Lösung ist.

Aufgabe 2 (4* Bonuspunkte)

Gegeben sei die stetige Funktion $\varphi : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ so, dass $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Zeigen Sie die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung
$u \in C_b^0([0,\infty) \times [0,\pi]) \cap C^\infty((0,\infty) \times [0,\pi])$ für das Problem

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & \text{in } (0,\infty) \times (0,\pi), \\ u(0,x) = \varphi(x), & x \in [0,\pi], \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \in (0,\infty). \end{cases}$$

Hinweis: Man setze das Anfangsdatum φ ungerade und 2π-periodisch als stetige Funktion nach $\mathbb{R}$ fort und benutze den Existenz- und Eindeutigkeitssatz auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}$. Man zeige, dass für diese Lösung gilt: $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$.

Bitte wenden Sie

Aufgabe 3 (4* Bonuspunkte)

Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beschränkte stetige Funktion. Sei $u : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Lösung des Cauchyproblems

$$\begin{cases} u_t &= \Delta u, & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) &= \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

wobei $u \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$. Man zeige:

$$\sup_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^n} u = \sup_{\mathbb{R}^n} \varphi, \qquad \inf_{[0,\infty)\times\mathbb{R}^n} u = \inf_{\mathbb{R}^n} \varphi.$$

Aufgabe 4 (Anwesenheitsaufgabe) (0 Punkte)

Gegeben seien ein reguläres Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, der Raum-Zeit-Zylinder $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$, $\varphi \in C^0(\overline{\Omega})$ und eine Lösung $u \in C^{1,2}(\overline{\Omega_T})$, des Problems:

$$\begin{cases} u_t &= \Delta u, & \text{in } \Omega_T, \\ u &= 0, & \text{auf } \partial\Omega \times (0,T], \\ u(0,x) &= \varphi(x), & x \in \overline{\Omega}, \end{cases}$$

Es sei auch $u_t \in C^{1,2}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega_T})$, $u_{t,x_i}(\cdot,t) \in C^0(\overline{\Omega})$. Man definiere die thermische Energie des Körpers Ω zur Zeit t:

$$E(t) = \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Beweisen Sie, dass für jedes $0 \le t_1 < t < t_2 \le T$ gilt:

$$E(t) \le [E(t_1)]^{\frac{t_2-t}{t_2-t_1}} [E(t_2)]^{\frac{t-t_1}{t_2-t_1}}$$

Hinweis: Man studiere $E'(t)$ und $E''(t)$ und zeige

$$E''(t) = 4\int_\Omega (u_t)^2 dx$$

Man benutze die Höldersche Ungleichung, um zu zeigen:

$$(E'(t))^2 \le E(t)E''(t).$$

Man nehme zunächst $E(t) > 0$ an; dann existiert $t \mapsto \log E(t)$ und man zeige die Konvexität dieser Funktion.

Frohe Weihnachten!

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 13.01., vor der Vorlesung**.