Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in partielle Differentialgleichungen — WS 2013/2014, Serie 1
Prof. Dr. G. Wang — 21.10.2013
Dipl.-Math. E. Mäder

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass der Ball $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ einen C^1-Rand hat.

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Sei $n \geq 3$ und $u_n : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|^{2-n}$.
Weiter sei $u_2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \log|x|$.
Zeigen Sie, dass $\Delta u_n = 0$ gilt für alle $n \geq 2$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (xy, y - \frac{y^2}{2} + \sin x).$$

Weiter seien die Kurven $\Gamma_1 := \{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\}$ und
$\Gamma_2 := \{(x, y)|\max(|x|, |y|) = 1\}$ gegeben.
Berechnen Sie $\int_{\Gamma_i} (f \cdot \nu_i)(x, y) dS(x, y)$ für $i = 1, 2$. (Dabei ist ν_i die äußere Normale des von Γ_i berandeten beschränkten Gebietes.)

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Beweisen Sie den Gauß'schen Integralsatz für den Quader:
Sei $Q := \{x \in \mathbb{R}^n| \max(|x_1|, \ldots, |x_n|) < 1\}$ und $f \in C^1(\overline{Q}, \mathbb{R}^n)$. Ist $\nu : \partial Q \to \mathbb{R}$ die äußere Normale in den C^1-Punkten von ∂Q, so gilt

$$\int_Q div f \, dx = \int_{\partial Q} f \cdot \nu \, dS.$$

Hinweis: Gehen Sie induktiv bezüglich n vor.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand und $u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ erfülle

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeigen Sie: $u \equiv 0$ in Ω.
Hinweis: Berechnen Sie $div(v\nabla v)$ (für beliebiges v) und benutzen Sie das Ergebnis, um $u\Delta u$ zu integrieren.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 28.10.13 bis 16.15 Uhr**.