Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in partielle Differentialgleichungen — WS 2013/2014, Serie 10
Prof. Dr. G. Wang — 9.1.2014
Dipl.-Math. E. Mäder

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Wir betrachten

$$w_t = \alpha w_{xx} + \beta w_x + \gamma w, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

Hier sind $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$. Finden Sie geeignete Konstanten $\lambda, a \in \mathbb{R}$ derart, so dass $u(t,x) := e^{\lambda t/\alpha} e^{-ax} w(\frac{t}{\alpha}, x)$ die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}$$

erfüllt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $I = [a,b)$ gegeben, ein $w \in C^1(I, \mathbb{R})$ erfülle die Ungleichung

$$w'(t) \leq \beta(t) w(t) + \alpha(t), \quad \forall t \in I.$$

Dann gilt für $t \in I$

$$w(t) \leq w(a) e^{\int_a^t \beta(s) ds} + \int_a^t \alpha(r) e^{\int_r^t \beta(s) ds} dr.$$

Insbesondere gilt $w(t) \leq 0$ für $t \in I$, falls $\alpha = 0$ und $w(a) = 0$.

Aufgabe 3 ($4 + 4^*$ Punkte)

Sei B die Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ und sei $f \in C^0([0,\infty))$. Betrachten Sie folgendes Problem:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t)(u - \frac{|x|^2}{2n}) - 1, \text{ in } B \times [0,\infty), \\ u(\cdot,t)_{|\partial B} = \frac{1}{2n}, \forall t \geq 0 \\ u(\cdot,0) = \frac{1}{2n}, \\ u \in C^2(B \times (0,\infty)) \cap C^0(\overline{B \times (0,\infty)}) \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass das Problem höchstens eine Lösung hat. (4 Punkte)
(b) Zeigen Sie, dass die Lösung (wenn sie existiert) nichtnegativ ist und die Abschätzung

$$0 \leq u(x,t) \leq \frac{1}{2n} \exp\{\int_0^t f(s) ds\} + \frac{|x|^2}{2n} \tag{1}$$

erfüllt. Weiter gilt $u(x,t) \leq 1/n$, falls $f \leq 0$. (4^* Bonuspunkte)
Bitten wenden Sie

Hinweis. Für (a): Benutzen Sie Aufgabe 2. Betrachten Sie $w(t) = \int_B v^2(t,x)dx$, wobei $v = u_1 - u_2$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $m > 1$ eine feste reelle Zahl. Man bestimme Lösungen für die nichtlineare Gleichung

$$u_t - \Delta u^m = 0, \quad u \geq 0.$$

mit Hilfe des Separations- und Selbstähnlichkeitsansatzes

$$u(t,x) = h(t)f(\xi), \quad \xi = \frac{|x|^2}{t^\sigma},$$

wobei die positive Zahl σ geeignet zu bestimmen ist. Man leite die gewöhnlichen Differentialgleichungen für h und f her und löse diese so, dass man bekommt:

$$\begin{cases} K_m(x,t) = t^{-n/\kappa}\{1 - b_m \frac{|x|^2}{t^{2/\kappa}}\}_+^{\frac{1}{m-1}}, & t > 0, \\ b_m = \frac{m-1}{2m\kappa}, \quad \kappa = n(m-1)+2. \end{cases}$$

Man beweise, dass $K_m(x,t)$ für $m \to 1$ gegen die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung strebt.

Aufgabe 5 (0 Punkte)

Mit Hilfe der Spiegelung lösen Sie das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \text{ in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ u_x(0,t) = 0, \forall t > 0 \\ u(x,0) = \varphi \in C_b^1(\overline{\mathbb{R}^+}), \text{ mit } \varphi_x(0) = 0. \end{cases}$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 13.1.14, vor der Vorlesung**.