Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in partielle Differentialgleichungen — WS 2013/2014, Serie 11
Prof. Dr. G. Wang — 13.1.2014
Dipl.-Math. E. Mäder

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ und $\psi \in C^1(\mathbb{R})$. Sie betrachten das Cauchyproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0,\cdot) = \varphi, u_t(0,\cdot) = \psi, \end{cases}$$

mit der Transformation $(t,x) \mapsto (\xi,\eta)$ mit $\xi = x+t$ und $\eta = x-t$. Sie leiter eine partielle Differetianlgleichung für $v(\xi,\eta) := u(t,x)$ her und lösen die partielle Differetianlgleichung. Schließlich bekommen Sie die D'Alembertsche Formel für u.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C_0^1(\mathbb{R})$. Es sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ die Lösung des Cauchyproblems für die Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \varphi(x), \text{ für } x \in \mathbb{R} \\ u_t(0,x) = \psi(x), \text{ für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Weiter bezeichne $k(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_t(t,x)^2 dx$ die kinetische und $p(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_x(t,x)^2 dx$ die potentielle Energie der Lösung u zur Zeit t. Man zeige:

(a) $t \mapsto k(t) + p(t)$ ist konstant.

(b) Für hinreichend große positive Zeiten gilt Gleichheit zwischen potentieller und kinetischer Energie:

$$\exists T_0 > 0 \text{ geeignet} : \forall t \geq T_0 : k(t) = p(t).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben seien die messbaren und beschränkten Funktionen $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Lösung $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Cauchyproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ in } [0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \varphi(x), \text{ für } x \in \mathbb{R} \\ u_t(0,x) = \psi(x), \text{ für } x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

Bitten wenden Sie

Definieren Sie u für $t \geq 0$ mit Hilfe der d'Alembertschen Formel. Zeigen Sie, dass u schwache Lösung von (1) in dem Sinne ist, dass für alle Testfunktionen $\xi \in C_0^2([0,1) \times \mathbb{R})$ gilt:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u(t;x)(\xi_{tt} - \xi_{xx})dxdt = -\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\xi(0,x)dx + \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\xi(0,x)dx.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei a eine Konstante mit $|a| < 1$. Sie zeigen, dass die Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

ist erhalten, unter der Lorentz-Transformation

$$\begin{cases} s &= \frac{t-ax_1}{\sqrt{1-a^2}}, \\ y_1 &= \frac{x_1-at}{\sqrt{1-a^2}}, \\ y_i &= x_i, \text{ für } i = 2,3. \end{cases}$$

Aufgabe 5 (0 Punkte)

Definition (Raum der Testfunktionen, Distributionen) Für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definiert man den Raum der Testfunktionen $\mathcal{D} := \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega)\}$. Diesen Raum versieht man mit folgendem Konvergenzbegriff: $\varphi_k \to \varphi$ genau dann, wenn ein Kompaktum $K \subset \Omega$ existiert mit $\forall k$: $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ und wenn für alle Multiindizes α gilt, dass $D^\alpha \varphi_k \to D^\alpha \varphi$ gleichmäßig. Man nennt ein auf $\mathcal{D}$ lineares Funktional $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *Distribution* auf Ω, falls dieses stetig im folgenden Sinn ist:

$$\lim_{k\to\infty} T(\varphi_k) = T(\varphi),$$

wobei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ eine beliebige Folge mit $\varphi_k \to \varphi$ ist.

Aufgabe Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Man zeige, dass durch

$$T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}, T_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

eine Distribution, die *von f induzierte Distribution*, gegeben ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 20.1.14, vor der Vorlesung**.