Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in partielle Differentialgleichungen — WS 2013/2014, Serie 12
Prof. Dr. G. Wang — 20.1.2014
Dipl.-Math. E. Mäder

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei u_ϵ ($\epsilon > 0$) die eindeutige Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = 0, \text{ für } x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(0,x) = \begin{cases} e^{-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - |x|^2}}, & \text{falls } |x| < \epsilon \\ 0, & \text{falls } |x| \geq \epsilon \end{cases} \end{cases}$$

Untersuchen Sie den Grenzwert von u_ϵ ($\epsilon \to 0$) in einer geeigneten Topologie.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass alle radialsymmetrische Lösungen u von

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

folgende Form haben:

$$u(t,x) = \frac{F(|x| - ct) + G(|x| + ct)}{|x|}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Man beweise, dass die Regularitätsanforderungen an die Anfangsdaten für die Wellengleichung in drei Dimensionen

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = \varphi(x), \text{ für } x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(0,x) = \psi(x), \text{ für } x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

im Allgemeinen notwendig sind. Das bedeutet, dass $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ im Allgemeinen notwendig ist, um $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ zu erhalten.
Hinweis. Man betrachte $\varphi = 0$ und ein konkretes radialsymmetrisches $\psi \in C^1$ mit $\psi\big|_{B_1(0)} = 0$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $t \mapsto \Delta u(t,0)$ im Allgemeinen nicht für alle Zeiten stetig ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ und $\psi \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Sei weiter $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^3)$ eine Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \text{ in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = \varphi(x), \text{ für } x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(0,x) = \psi(x), \text{ für } x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

(a) Für bliebiges $(t_0, x_0) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^3$ definiere ein Vektorfeld ($x \in B_{t_0}(x_0)\backslash\{x_0\}$) durch

$$V(x) := \left(\frac{Du(t,x)}{|x-x_0|} + u(t,x)\frac{x-x_0}{|x-x_0|^3} + u_t(t,x)\frac{x-x_0}{|x-x_0|^2} \right)\Big|_{t=t_0-|x-x_0|}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{div} V = 0.$$

(b) Leiten Sie eine Formel für $u(x_0, t_0)$ bzgl. φ und ψ durch Integrieren von $\operatorname{div} V$ über $B_{t_0}(x_0)\backslash B_\epsilon(x_0)$ mit $\epsilon \to 0$ her.

Bemerkung: Dies ist eine alternative Lösungsmethode.

Aufgabe 5 (0 Punkte)

Definition (δ-Distribution) Gegeben sei ein Punkt $a \in \mathbb{R}^n$. Man nennt das Funktional

$$\delta_a : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \varphi \mapsto \delta_a(\varphi) := \varphi(a)$$

Delta-Distribution in a.

Definition (Ableitung von Distributionen) Sei T eine Distribution auf Ω, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex. Man definiert die Distributionsableitung $D^\alpha T$ durch:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \quad D^\alpha T(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi).$$

Aufgabe Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f \in C^1(\Omega)$. Man zeige, dass dann die klassische und die Distributionsableitung übereinstimmen:

$$T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} T_f.$$

Aufgabe Sei für $x \in \mathbb{R}^n/\{0\}$

$$\Gamma(x) := \begin{cases} \frac{1}{n(n-2)e_n}|x|^{2-n}, & \text{falls } n > 2 \\ -\frac{1}{2\pi}\log|x|, & \text{falls } n = 2. \end{cases}$$

Benutzen Sie die Sätze 3.2/3.3 der Vorlesung, um zu zeigen, dass im Distributionssinne in $\mathbb{R}^n$

$$-\Delta T_\Gamma = \delta_0.$$

gilt.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 27.1.14, vor der Vorlesung**.