Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in partielle Differentialgleichungen — WS 2013/2014, Serie 13
Prof. Dr. G. Wang — 27.1.2014
Dipl.-Math. E. Mäder

---

**Aufgabe 1** (4 Punkte)

Lösen Sie das Cauchyproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0, \cdot) = u_t(0, \cdot) = 0, \end{cases}$$

für $f(t, x) = e^{x-t}$ und $f(t, x) = x^2$.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad (t, x) \in [0, \infty) \times [0, \infty), \\ u(0, x) = \varphi(x) \quad x \in [0, \infty) \\ u_t(0, x) = \psi(x) \quad x \in [0, \infty) \\ u(t, 0) = h(t) \quad t \in [0, \infty) \end{cases}$$

a) Finden Sie die Kompatibilitätsbedingungen für das Problem.

b) Finden Sie eine Lösungsformel unter den Kompatibilitätsbedingungen von a).

**Aufgabe 3** (8 Punkte)

Betrachte das Cauchyproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = 0, \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(0, x) = \psi(x), \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Seien $\psi \in \mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ ist die Schwartzsche Klasse) und $u$ eine $C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ Lösung mit $u(t, \cdot), u_t(t, \cdot), u_{tt}(t, \cdot) \in \mathcal{S}$. Sei $\hat{u}(t, \cdot)$ die Fouriertransfromierte von $u(t, \cdot)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{u}$ die Gleichung (für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$)

$$\hat{u}_{tt}(t, \xi) + |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) = 0, \quad \hat{u}(0, \xi) = 0, \quad \hat{u}_t(0, \xi) = \hat{\psi}(\xi).$$

erfüllt und lösen Sie die Gleichung. **Bitte wenden**

(b) Sei nun $n = 3$. Zeigen Sie

$$\frac{\sin|\xi|t}{|\xi|} = \frac{1}{4\pi t}\int_{|\eta|=t} e^{i\langle\eta,\xi\rangle}dS(\eta) = \frac{t}{4\pi}\int_{|\eta|=1} e^{it\langle\eta,\xi\rangle}dS(\eta)$$

*Hinweis. Zeigen Sie zunächst* $\int_{|\eta|=t} e^{i\langle\eta,\xi\rangle}dS(\eta) = \int_{|\eta|=t} e^{i\langle\eta,T\xi\rangle}dS(\eta)$ *für alle* $T \in O(3)$ *(d.h.* $T^t = T^{-1}$*). Wählen Sie dann ein* $T \in O(3)$ *mit* $T\xi = |\xi|(0,0,1)$.

(c) Mit Hilfe der inversen Fouriertransformation finden Sie $u$ ausgehend von $\hat{u}$.
*Hinweis. Benutzen Sie (b).*

**Aufgabe 4** (0 Punkte)

*Definition (Distribution einer Kurve)*
Gegeben sei eine glatte reguläre doppelpunktfreie Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ bzw. $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Man nennt das Funktional

$$\delta_\gamma \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}; \quad \varphi \mapsto \int_\gamma \varphi(x)ds(x),$$

*Delta-Distribution der Kurve*, wobei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

**Aufgabe** Gegeben sei das Problem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1 \\ x+1, & -1 \le x \le 0 \\ 1-x, & 0 \le x \le 1 \end{cases} \\ u_t(0,x) = 0 \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Man definiere $u$ mit Hilfe der d'Alembertschen Formel. Berechnen Sie $u_{xx}$ and $u_{tt}$ als Distributionsableitungen und zeigen Sie, dass $u$ in diesem Sinne obiges Cauchyproblem löst.

*Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf jedes Lösungsblatt.* **Abgabe ist am Montag, 3.2.14, vor der Vorlesung**.