Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in partielle Differentialgleichungen — WS 2013/2014, Serie 14
Prof. Dr. G. Wang — 3.2.2014
Dipl.-Math. E. Mäder

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Untersuchen Sie das Eigenwertptoblem von

$$\begin{aligned} -\Delta u + H(x)u &= \lambda u, \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0, \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $H : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist.
a) Finden Sie die entsprechende schwache Formulierung des Eigenwertptoblems.
b) Untersuchen Sie den kleinsten Eigenwert und die entsprechende Eigenfunktion.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Mit der Trennungs-Methode (Separationsansatz) untersuchen Sie die Laplacegleichung $\Delta u = 0$ auf $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$. Finden Sie alle harmonischen funktionen von der Form

$$u(r, \theta) = f(r)g(\theta).$$

($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ sind die Polarkoordinaten.) Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:
a) Leiten Sie die Gleichungen für f und g her.
b) Lösen Sie erst die Gleichung für g, dann die Gleichung für f.
c) Sei $\varphi \in L^2(\partial B_1(0))$. Sie finden die (formale) Lösung für

$$\Delta u = 0 \text{ in } B_1(0), \quad u(x) = \varphi(x) \text{ für } x \in \partial B_1(0).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Für alle $u_0 \in L^2(0, \pi)$ lösen Sie mit der Trennungs-Methode das folgende Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, && \text{für } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, \pi) \\ u(0, x) &= u_0(x), && \text{für } x \in (0, \pi) \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) &= 0, && \text{für } t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Betrachten Sie den Würfel $W = [0,\pi] \times [0,\pi] \subset \mathbb{R}^2$ und das Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u, && \text{in } W \\ u &= 0, && \text{auf } \partial W \end{aligned} \qquad (EWP)$$

und das vollständige Orthonormalsystem $e_{j,k}(x,y) = \frac{2}{\pi}\sin(jx)\sin(ky)$ von Eigenfunktionen von (EWP). Ordnen Sie die Eigenwerte der Größe nach an $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$, und führen Sie jeden Eigenwert entsprechend seiner Vielfachheit auf. Zeigen Sie ($\sim$ bedeutet asymptotisch gleich)

$$\lambda_j \sim \frac{4}{\pi} j \quad (j \to \infty)$$

Führen Sie eine entsprechende Überlegung auch für n-dimensionale Würfel durch und zeigen Sie, dass mit geeigneten Konstanten C_n gilt:

$$\lambda_j \sim C_n j^{2/n} \quad (j \to \infty).$$

Bitte bereiten Sie für die Klausur alle Hausaufgaben vor, <u>außer</u>:
Serie 1, Aufgabe 1,3,4,
Serie 3, Aufgabe 4,
Serie 4, Aufgabe 2
Serie 5, Aufgabe 1, 3(b),
Serie 6, Aufgabe 1,2,3
Serie 7, Aufgabe 1,
Serie 9, Aufgabe 3
Serie 10, Aufgabe 3(b),4
Serie 11, Aufgabe 5,
Serie 12, Aufgabe 1,3,5
Serie 13, Aufgabe 3,4
Serie 14, Aufgabe 4.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 10.2.14, vor der Vorlesung**.