Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in partielle Differentialgleichungen — WS 2013/2014, Serie 2
Prof. Dr. G. Wang — 28.10.2013
Dipl.-Math. E. Mäder

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei B eine reelle $n \times n$-Matrix, $c \in \mathbb{R}^n$, $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Bx+c$, und $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Man zeige

$$-\Delta(u \circ Q) = (L_0 u) \circ Q,$$

wobei

$$L_0 := -\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}$$

ist und die a_{ik} die Elemente der Matrix $A := BB^t$ sind.
Insbesondere ist also $\Delta(u \circ Q) = (\Delta u) \circ Q$, wenn B eine orthogonale Matrix ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Man bestimme alle Funktionen u auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\} =: \mathbb{R}^*$, die sowohl rotationssymtrisch (d.h. $u(x) = f(|x|)$) als auch harmonisch. Dazu leite man zunächst für $f \in C^2(\mathbb{R}^*)$ die Relation

$$\Delta u(x) = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) \quad \text{mit } r = |x|$$

für alle $x \in R^n \backslash \{0\}$ her.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4\}$. Weiter sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ eine harmonische Funktion mit den Randwerten $u|_{\partial\Omega}(x, y) = 1 + 3y^2$. Geben Sie, ohne u explizit zu berechnen, den maximalen Wert von u in $\overline{\Omega}$ und den Funktionswert $u(0)$ an.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ regulär und sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung

$$\begin{cases} \Delta u = -1, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle $x_0 \in \Omega$ gilt

$$u(x_0) \geq \frac{1}{2n} \inf_{x \in \partial\Omega} |x - x_0|^2.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 04.11., vor der Vorlesung**.