Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in partielle Differentialgleichungen — WS 2013/2014, Serie 3
Prof. Dr. G. Wang — 4.11.2013
Dipl.-Math. E. Mäder

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, das spiegelsymmetrisch bezüglich der Ebene $E := \{x_n = 0\}$ ist, d.h.

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \Omega \iff (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) \in \Omega.$$

Weiter bezeichne $\Omega^+ := \Omega \cap \{x_n > 0\}$.
Zeigen Sie: Ist $u \in C^2(\Omega^+) \cap C^0(\overline{\Omega^+})$ harmonisch und $u|_{E \cap \Omega} \equiv 0$, so ist $v : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$v(x) := \begin{cases} u(x), & \text{falls } x_n \geq 0 \\ -u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n), & \text{falls } x_n < 0 \end{cases}$$

in $C^2(\Omega)$ und harmonisch. *Hinweis: Benutzen Sie Satz 3.10*

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei $B_R(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$.

1. Sei $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B_R(0)})$ harmonisch und nicht-negativ. Leiten Sie aus der Poisson-Formel folgende Version einer Harnackungleichung her:

$$\frac{R^{n-2}(R - |x|)}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R + |x|)}{(R - |x|)^{n-1}} u(0)$$

   für alle $x \in B_R(0)$.

2. Leiten Sie daraus den Satz von Liouville ab: Eine nach unten (oder oben) beschränkte harmonische Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ist konstant.

Aufgabe 3 (*Maximumprinzip*) (4 Punkte)
a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sowie $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Beweisen Sie:
a1) Wenn $x \in \Omega$ ein lokales Maximum von u ist, so gilt $\Delta u(x) \leq 0$.
a2) u genüge der Gleichung $\Delta u = u^3 - u$ und sei am Rand beschränkt, d.h. es gelte $|u(\partial\Omega)| \leq 1$. Man zeige, dass $-1 \leq u \leq 1$ in $\overline{\Omega}$ gilt.

b) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine harmonische Funktion. Zeigen Sie: die Niveaumengen

$$N_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n |\ u(x) = \alpha\}$$

sind für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ entweder leer oder unbeschränkt.
Hinweis: Mittelwerteigenschaft auf beliebigen Sphären! **Bitten wenden Sie.**

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\Omega := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ der obere Halbraum und $\Phi = \Phi(|\cdot|)$ die Grundlösung aus der Vorlesung zur Laplace-Gleichung in $\mathbb{R}^n$. Sei weiter

$$\mathbb{R}^n \ni (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) \mapsto \tilde{x} := (x_1, \cdots, x_{n-1}, -x_n) \in \mathbb{R}^n$$

die Spiegelung an der Ebene $\partial\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

a) Zeigen Sie, dass

$$G : \left(\Omega \times \overline{\Omega}\right) \setminus \{(z,z) : z \in \Omega\} \to \mathbb{R}, \quad G(x,y) := \Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x})$$

eine Greenfunktion der Laplace-Gleichung in Ω ist.

b) Bestimmen Sie eine Integraldarstellung für eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ von

$$\begin{cases} \Delta u &= 0, \text{ in } \Omega \\ u &= g, \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Benutzen Sie Ergebnisse der Vorlesung, ohne deren Gültigkeit für unbeschränkte Gebiete zu prüfen.

Aufgabe 5 (Anwesenheitsaufgabe für das Tutorat) (0 Punkte)

Es sei $u : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie, dass

$$v(x_1, x_2, x_3) := \frac{1}{|x|} u\left(\frac{x_1}{|x|^2}, \frac{x_2}{|x|^2}, \frac{x_3}{|x|^2}\right)$$

auch harmonisch in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist.
a) Gibt es einen tieferen Grund hierfür?
b) Gilt ein analoges Resultat in beliegier Dimension n?

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie ded Tag Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 11.11., vor der Vorlesung**.