Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in partielle Differentialgleichungen — WS 2013/2014, Serie 4
Prof. Dr. G. Wang — 11.11.2013
Dipl.-Math. E. Mäder

Aufgabe 1 (4 Punkte)
a) Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe C^2-Funktion und sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen sei. Zeigen Sie, dass $\phi \circ u : \Omega \to \mathbb{R}$ subharmonisch ist.
b) Sei $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass $u(x) = \log |x| : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ subharmonisch ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit C^2-Rand. Zeigen Sie, dass Ω der *inneren Kugelbedingung* genügt, d.h. für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ existiert eine Kugel $B_R(y) \subset \Omega$ mit $x_0 \in \partial B_R(y)$.
Hinweis: Mittels einer geeigneten Drehung um den Punkt x_0 nehmen wir an, dass sich der Rand von Ω in einer Umgebung U von x_0 als Graph einer C^2-Funktion darstellen lässt und unterhalb des Graphen liegt, d.h.

$$U \cap \Omega = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n | x' = (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in U', x_n < f(x')\}$$

.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $R \geq 1$ and $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R}) \cap C^0(\mathbb{R}^n \setminus B_R)$ eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \backslash \overline{B_R}, \\ u &= 0 \text{ auf } \partial B_R. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $u = 0$ gilt, falls

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{u(x)}{\log |x|} = 0, \text{ für } n = 2, \qquad \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \text{ für } n \geq 3$$

gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Zeigen Sie die Symmetrie und die Positivität der Greensche Funktion G, d.h. $\forall$ $x, y \in \Omega$ mit $x \neq y$

$$a) \quad G(x, y) = G(y, x) \quad \text{ und } \quad b) \quad G(x, y) > 0$$

gilt.
Hinweis. Für a) wenden Sie den Greenschem Satz (Felgerung 0.8 (b)) auf $f(z) := G(x, z)$ und $g(z) := G(y, z)$ in $\Omega \backslash (B_\epsilon(x) \cup B_\epsilon(y))$ an und benutzen die Rechnungen wie im Beweis von Satz 3.2. **Bitten wenden Sie**

Aufgabe 5 (Anwesenheitsaufgabe für das Tutorat) (0 Punkte)

Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch, und sei $F \in \mathbb{R}^{n+1}$ ihre Graph, d.h.,

$$F := \{(x, u(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} | x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Für $p \in F$ sei T_p der Tangentialraum von F in p. Zeigen Sie

$$(T_p \cap F) \backslash \{p\} \neq \emptyset, \text{ für alle } p \in F.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 18.11., vor der Vorlesung**.