Aufgabe 1 *(Rektifizierbar oder nicht)*
Entscheiden Sie (mit Nachweis) ob die folgende Kurven $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ rektifizierbar sind.

(i) $c(t) = \begin{cases} (t^2, t^2), & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t), & \text{für } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$

(ii) $c(t) = \begin{cases} (2 + t, t^2 \sin \frac{1}{t}), & \text{für } t \in (0, 1] \\ (2, 0), & \text{für } t = 0. \end{cases}$

(iii) $c(t) = \begin{cases} (t, t \sin \frac{1}{t}), & \text{für } t \in (0, 1] \\ (0, 0), & \text{für } t = 0. \end{cases}$

Aufgabe 2 *(Arcimedische Spirale)*
Sei $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(a) Leiten Sie eine Formel für die Bogen Länge ebener Kurven $\alpha(t) = (r(t) \cos \phi(t), r(t) \sin \phi(t))$ von $t = a$ bis $t = b$ in Polar-ko-ordinaten her.

(b) Zeichnen Sie die arcimedische Spirale, $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ (α definiert wie in (a)), wobei $r(t) = t$, und $\phi(t) = t$, und berechnen Sie die Bogen Länge $L(\alpha|_{[\pi, 2\pi]})$.

(c) Parameterisieren Sie $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$ nach Bogenlänge.

Aufgabe 3 *(Bi-linear Formel)*
Sei $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Bi-linear Form. Sei $a, b : I \to \mathbb{R}^n$ $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ Kurven. Leiten Sie eine Formel für $\frac{d}{dt}(B(a(t), b(t))$ her.

Aufgabe 4 *(Astroide)*
Eine Kreisscheibe vom Radius 1 in der Ebene rolle innen auf eine Kreislinie vom Radius 4. Die durch einen Punkt auf den Rand des rollenden kreises beschriebene Kurve heisst Astroide

(a) Parameterisieren Sie die Astroide durch den punkt $(4, 0)$ mit den Winkel des Berührungpunkts der beiden Kreise als Parameter. An welchen Stellen ist die Parameterisierung singulär (also nicht regulär)?

(b) Fertigen Sie eine Skizze der Astroide an.

(c) Berechnen Sie die Bogenlänge der Astroide auf dem Intervall $[0, 2\pi]$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 07.05.2003 bis 9:15.