
Aufgabe 1 *Eine Familie von Ebenen*
Seien $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $N : I \to \mathbb{R}^3$ C^2 reguläre Kurven, mit $|N| = 1$ und $\langle \alpha', N \rangle \neq 0$, für alle $t \in I$. Das Paar $\{\alpha, N\}$ heisst dann eine *Familie von Tangentialebenen.*

1. Zeigen Sie: $F(s,t) = \alpha(s) + t\frac{N \wedge N'}{|N|}$ ist eine abwickelbare Regelfläche.

2. Falls $\alpha' \wedge (N \wedge N')(s) \neq 0$ für alle $s \in I$, zeigen Sie dann, dass F regulär in einer Umgebung von $t = 0$ ist und dass $N(s)$ der Einheitsnormalenvektor von F in $(s, 0)$ ist.

3. Sei α nach der Bogenlänge parametrisiert. Nehmen Sie an, dass k und ω (Krümmung bzw. Torsion von α) nirgendwo verschwinden. Beweisen Sie dass $\{\alpha, \beta\}$ eine *Familie von Tangentialebenen* ist (wie oben definiert) und dass $\tilde{F}(s,t) = \alpha(s) + t\frac{\beta \wedge \beta'}{|\beta|}$ gleich der Tangentenfläche F zu α ist, $F(s,t) = \alpha(s) + t\alpha'(s)$ ($\{\tau, \nu, \beta\}$ ist das Frene't Dreibein).

Aufgabe 2 *Ennepersche Fläche*
Sei $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $X(u,v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2)$, die Ennepersche Fläche

1. Berechnen Sie die erste und zweite Fundamentalform.

2. Zeigen Sie dass die Mittlere Krümmung $H \equiv 0$ ist.

3. Sei $F : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ durch $F(\rho, \theta) = X(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ gegeben. Zeigen Sie: $F(\rho_1, \theta_1) = F(\rho_2, \theta_2)$ impliziert, dass $\rho_1 = \rho_2$ und $\cos(2\theta_1) = \cos(2\theta_2)$ und
$$\rho\sin\theta + \frac{\rho^3}{3}\sin(3\theta) = 0 \qquad (*).$$
Umgekehrt, Zeigen Sie: Falls (ρ, θ) (*) erfüllt, dann gilt $F(\rho, \theta) = F(\rho, 2\pi - \theta)$ (also der Schnitt der Fläche mit der Ebene $y = 0$ ist eine Kurve, längs welcher sich die Fläche selbst durch schneidet).

Aufgabe 3*Parallelflächen*
Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine C^2 reguläre Fläche, und $a \neq 0$ eine Konstante. Sei $\tilde{F} : U \to \mathbb{R}^3$ durch $\tilde{F}(x,y) = F(x,y) + a\nu(x,y)$ gegeben. Beweisen Sie:

1. $$\frac{\partial}{\partial x}\tilde{F} \wedge \frac{\partial}{\partial y}\tilde{F} = (1 - 2aH(x,y) + a^2K(x,y))(\frac{\partial}{\partial x}F \wedge \frac{\partial}{\partial y}F),$$
wobei K, H die Gau/ss- und Mittlere Krümmung von F sind.

2. Für reguläre Punkte gilt:

$$\tilde{K} = \frac{K}{(1 - 2aH + a^2K)},$$

und

$$\tilde{H} = \frac{H - aK}{(1 - 2aH + a^2K)},$$

wobei $\tilde{H}, \tilde{K}$ die Mittlere und Gau/ss- Krümmung von $\tilde{F}$ sind.

Aufgabe 4 *Gau/ss-Abbildung wieder*
Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine C^2 reguläre Fläche ohne Nabelpunkte (siehe Aufgabe 4, serie 9).

1. Beweisen Sie: F ist genau dann eine Minimalfläche ($H \equiv 0$), wenn die Gau/ss-Abbildung $N : U \to S^2$ die Gleichung

$$\langle DN(x)(w_1), DN(x)(w_2)\rangle = \lambda(x)g(x)(w_1, w_2)$$

für alle $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$ erfüllt, wobei $\lambda : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist die nirgendwo verschwindet.

2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to S^2$ die Inverse der Stereographischen Projektion. Betrachte eine Umgebeung V eines Punktes x der Minimalfläche aus Teil 1 der Aufgabe, so dass $N : V \to S^2$ ein Diffeomorphismus ist (weil $K(x) = \det(DN) \neq 0$ ist, gibt es nach dem Umkehrsatz so ein solches V). Zeigen Sie, dass die Parametrisierung $Y : M \to \mathbb{R}^3$, $Y = F \circ N^{-1} \circ f$, winkeltreu ist, wobei $M = f^{-1}(N(V))$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 16.07.2003 bis 9:15.