---

**Aufgabe 1** *Assoziierte Familie von Minimalflächen.*
Für $\phi \in [0, \pi/2]$ sei $X_\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$X_\phi(u,v) := \begin{pmatrix} \sin\phi \cosh u \cos v & + \cos\phi \sinh u \sin v \\ \sin\phi \cosh u \sin v & - \cos\phi \sinh u \cos v \\ \sin\phi\, u & + \cos\phi\, v \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

1. $X_0$ ist eine Wendelfläche und $X_{\pi/2}$ ein Katenoid (vgl. Serie7, Aufgabe 1 und Serie 8 Aufgabe 1+2 ).
2. Die erste Fundamentalform von $X_\phi$ stimmt für alle $\phi$ überein.
3. Alle $X_\phi$ sind Minimalflächen.

**Aufgabe 2** *Hauptsatz der Flächentheorie*
Sei $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine Minimalfläche mit $g_{11} = g_{22}$, $g_{12} = 0$.
Für $\phi \in \mathbb{R}$ sei

$$\begin{pmatrix} h_{11}^\phi & h_{12}^\phi \\ h_{21}^\phi & h_{22}^\phi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

wobei die $h_{ij}$ die Komponenten der zweiten Fundamentalform von $X$ sind, und $g_{ij}^\phi := g_{ij}$ für $j = 1, 2$. Zeigen Sie:

1. $h_{12}^\phi = h_{21}^\phi$ (d. h. $(h_{ij})$ ist symmetrisch), und die $g_{ij}^\phi$, $h_{ij}^\phi$ erfüllen die Gleichungen von Gauß und Codazzi-Mainardi.

   (Ist $U \subset \mathbb{R}^2$ einfach-zusammenhängend, so existiert nach der Vorlesung eine Minimalfläche $X^\phi : U \to \mathbb{R}^3$ mit erster Fundamentalform $g_{ij}^\phi$ und zweiter Fundamentalform $h_{ij}^\phi$.)

2. Die erste und zweite Fundamentalform der Flächen $X_\phi$ aus Aufgabe 1 haben die oben angegebene Gestalt.

   (Damit sind diese $X_\phi$ ein konkretes Beispiel für diese Konstruktion.)

**Aufgabe 3** *Gauß-Krümmung einer winkeltreuen Fläche*
Die erste Fundamentalform $g$ einer $C^3$ reguläre Fläche $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ habe die Gestalt $g(q) = e^{2f(q)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie, dass $K = -e^{-2f}(f_{11} + f_{22})$.
2. Zeigen Sie, dass falls $g$ winkeltreu ist, dann man kann die erste Fundamentalform immer so schreiben.

**Aufgabe 4** *Parametertransformation*
Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche, $g$ die erste Fundamentalform, und $\nabla$ die zugehörige kovariante Ableitung. Sei $\phi : V \to U$ ein Diffeomorphismus, $\tilde{F} : V \to \mathbb{R}^3$ die Fläche die durch $\tilde{F} = F \circ \phi$ gegeben ist, $\tilde{g}$ die erste Fundamentalform, und $\tilde{\nabla}$ die zugehörige kovariante Ableitung. Sei $\psi : U \to V$ die Inverse von $\phi$. Zeigen Sie:

1. Für alle Vektorfelder $X, Y : V \to \mathbb{R}^2$ auf $V$ gilt

$$\tilde{\nabla}_X Y(p) = D\psi(\nabla_{D\phi(X)} D\phi(Y))(p),$$

   wobei für ein $C^0$ Vektorfeld $X : V \to \mathbb{R}^2$ auf $V$, und $\phi : V \to U$ ein glatter Diffeomorphismus, das Vektorfeld $D\phi(X) : U \to \mathbb{R}^2$ ist durch $D\phi(X)(\phi(p)) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}(p) X^i(p)$ definiert.

2. Seien $\tilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2\})$ die Christoffelsymbole der ersten Fundamentalform $\tilde{g}$. Zeigen Sie:

$$\tilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}(\phi(p)) = \sum_{i,j,k=1}^{2} \Gamma^k_{ij}(p) \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\alpha}(p) \frac{\partial \phi^j}{\partial x^\beta}(p) \frac{\partial \psi^\gamma}{\partial x^k}(\phi(p)) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 \phi^i}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial \psi^\gamma}{\partial x^i}(\phi(p)).$$

**Aufgabe 5** *Rotationsflachen: Christoffelsymbole*
Sei $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ mit $\alpha(t) = (x(t), 0, z(t))$ eine $C^2$ Kurve, die ganz in der $x$-$z$-Ebene verläuft, und sei $\alpha$ regulär. Sei $F$ die durch $F(t, \theta) = (x(t)\cos\theta, x(t)\sin\theta, z(t))$ gegebene Rotationsfläche. Berechenen Sie die Christoffelsymbole für $F$.

*Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 23.07.2003 bis 9:15. Die Punkte die Sie hier bekommen sind Bonus Punkten.*