Aufgabe 1 *(Krümmung der Astroide)*

(i) Berechnen Sie die Krümmung der Astroide (Aufgabe 4, Serie 1).

(ii) An welchen Stellen hat diese minimalen Betrag?

(iii) Was ist das Supremum des Betrages der Krümmung? Wird das Supremum angenommen? Falls es angenommen wird, dann an welchen Stellen?

Aufgabe 2 *(Parametrisierung als Graph)*

(i) Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ reguläre parametrisierte Kurve, und $\phi \in C^1(\tilde{I}, I)$ mit $\phi' \neq 0$. Definiere $\tilde{c} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ durch $\tilde{c} = c \circ \phi$. Zeigen Sie: Falls $c \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$ $(k \geq 1)$ und $\tilde{c} \in C^k(\tilde{I}, \mathbb{R}^n)$, dann gilt $\phi \in C^k(\tilde{I}, I)$.

(ii) Sei $\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ eine C^1-Kurve mit $x'(0) \neq 0$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\epsilon > 0$ und einen Diffeomorphismus $\phi \colon (x(0) - \epsilon, x(0) + \epsilon) \to \mathbb{R}$, so dass $(\alpha \circ \phi)(t) = (t, (y \circ \phi)(t))$ für alle $t \in (x(0) - \epsilon, x(0) + \epsilon)$.

(iii) Sei β eine C^2 Kurve mit $\beta(t) = (t, y(t))$. Zeigen Sie dass β regulär ist, und berechnen Sie die Krümmung $k(t)$ von β als Funktion von $y'(t)$ und $y''(t)$.

Aufgabe 3 *(Schmiegkreis)*

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ regulär, $\alpha \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$ und $k : I \to \mathbb{R}$ die Krümmung von α. Sei $t_0 \in I$ mit $k(t_0) > 0$, und $k'(t_0) > 0$. Zeigen Sie: es existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $\alpha(t)$ für $t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$ im Innern des Schmiegkreises liegt, und für $t \in (t_0 - \epsilon, t_0)$ außerhalb des Schmiegkreises liegt (Für die Definition des Schmiegkreises, siehe Vorlesung). Hinweis: Begründen Sie, dass O.b.d.A man annehmen darf, dass α nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Aufgabe 4 *(Kürzeste Verbindung)*

Sei $p, q \in \mathbb{R}^n$ und $c : I \to \mathbb{R}^n$, $c(t) = (1 - t)p + tq$.

(i) Zeigen Sie dass $L(\tilde{c}) \geq L(c)$ für alle parametrisierten Kurven $\tilde{c} : I \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{c} \in C^0(I, \mathbb{R}^2)$.

(ii) Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha \in C^0(I, \mathbb{R}^2)$. Zeigen Sie: Falls $L(\alpha) = L(c)$ dann gilt $\alpha(t) = (1 - \phi(t))p + \phi(t)q$, wobei $\phi : I \to I$ monoton und stetig ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 14.05.2003 bis 9:15.