Aufgabe 1 *(Hauptsatz für ebene Kurven)*
Sei $k : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $k(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Bestimmen Sie eine C^∞ Kurve (mit Nachweis) $c : (-1,1) \to \mathbb{R}^2$ die nach der Bogenlänge parametrisziert ist, mit $\kappa(t) = k(t)$, wobei κ die Krümmung der Kurve c ist.

Aufgabe 2 *(Umlaufzahl)*
Sei $c_1 : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ die Parabel $c_1(t) = (t, 1-t^2)$. Sei $c_2 : [1,2] \to \mathbb{R}^2$ die Gerade von $(1,0)$ bis $(\frac{1}{2}, -1)$, $c_3 : [2,3] \to \mathbb{R}^2$ die Gerade von $(\frac{1}{2}, -1)$ bis $(-\frac{1}{2}, 0)$, $c_5 : [4,5] \to \mathbb{R}^2$ die Gerade von $(\frac{1}{2}, 0)$ bis $(-\frac{1}{2}, -1)$, $c_6 : [5,6] \to \mathbb{R}^2$ die Gerade von $(-\frac{1}{2}, -1)$ bis $(-1,0)$ wobei die Parametrisierung so gewählt ist, dass $c_2(1) = (1,0)$,$c_2(2) = (\frac{1}{2}, -1)$, usw., und so dass $|c_2'|, |c_3'|, |c_5'|, |c_6'|$ alle konstant sind. Sei $c_4 : [3,4] \to \mathbb{R}^2$ eine C^∞ reguläre parametrisierte Kurve, die auf dem Kreis von radius $\frac{1}{2}$ und Mittelpunkt $(0,0)$ liegt, so dass $c_4(3) = (-\frac{1}{2}, 0)$, $c_4(4) = (\frac{1}{2}, 0)$, wobei die Paramterisierung so gewählt ist, dass $|c_4'|$ konstant ist. Sei $c : [-1,6] \to \mathbb{R}^2$ die parametrisierte Kurve mit $c|_{[-1,1]} = c_1$, $c|_{[1,2]} = c_2$, $c|_{[2,3]} = c_3$, $c|_{[3,4]} = c_4$, $c|_{[4,5]} = c_5$, $c|_{[5,6]} = c_6$.

(a) Geben Sie explizit die Parametrisierung von c an.

(b) Bestimmen Sie eine stetige Funktion $\theta : [-1,6] \to \mathbb{R}$ und eine stetige Funktion $r : [-1,6] \to \mathbb{R}$ so dass $c(t) = r(t)(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$.

Aufgabe 3 *(Schmiegkreis II)*

Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (t, \frac{k_0}{2}t^2)$, wobei $k_0 \neq 0$ eine Konstante ist. Seien $t_1 < 0 < t_2$ Punkte in $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie dass es einen eindeutigen Kreis $L = L(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ gibt so dass $c(t_1) \in L$, $c(t_2) \in L$ und $(0,0) \in L$.

(b) Bestimmen Sie den Radius $R = R(t_1, t_2)$ von dem Kreis L.

(c) Zeigen Sie: $\lim_{t_1,t_2 \to 0} R(t_1, t_2) = \frac{1}{k_0}$.

Aufgabe 4 *(Maxima)*

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ eine C^2 reguläre Kurve, so dass $|\alpha(t)|$ and der Stelle $t_0 \in I$ ein lokales Maxiumum hat. Zeigen Sie: $\kappa(t_0) \geq |\frac{1}{\alpha(t_0)}|$, wobei $\kappa : I \to \mathbb{R}$ die Krümmung von α ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 21.05.2003 bis 9:15.