
Aufgabe 1 *(Umlaufsatz von Hopf)* Sei $c : [0, L] \to \mathbb{R}$ einfach geschlossen und nach der Bogenlänge parametrisiert. Sei $D = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq t \leq L\}$, und

$$w : D \to S^1 \subset \mathbb{R}^2,\ w(s,t) = \begin{cases} c'(s), & \text{für } t = s, \\ -c'(L), & \text{für } s = 0, t = L, \\ \frac{c(t)-c(s)}{|c(t)-c(s)|}, & \text{sonst .} \end{cases}$$

(siehe Vorlesung, Umlaufsatz von Hopf).
Zeigen Sie: die Funktion w ist stetig in dem Punkt $(0, L)$ (in der Vorlesung wurde gezeigt dass die Funktion w ist stetig auf $D/\{(0, L)\}$.

Aufgabe 2 *(Umlaufzahl)* Sei L_1 der Kreis in $\mathbb{R}^2$ mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 0)$, und L_2 der Kreis in $\mathbb{R}^2$ mit Radius 2 und Mittelpunkt $(3, 0)$. Sei $c : [0, a] \to L_1 \bigcup L_2 \subset \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^1 kurve mit $c|_{[0,2\pi]} \subset L_1$, und $c|_{[2\pi,a]} \subset L_2$, und $c(0) = c(2\pi) = c(a) = (1, 0)$. Ausserdem, sei c nach der Bogenlänge parametrisiert.

- [i] Geben Sie c explicit an (unter anderm, müssen Sie a bestimmen).
- [ii] Berechnen Sie $n(c, 0)$, die Umlaufzahl von c um 0.
- [iii] Berechnen Sie den Rotationsindex $ind(c)$ von c.

Aufgabe 3 *(Konvex)*

- [i] Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine C^1 einfache geschlossene nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Innengebiet U und Normale $\nu = J \cdot c'$ (siehe Jordan-Kurvensatz in der Vorlesung). Zeigen Sie: Entwieder:

  $$\forall t_0 \in I, \exists \rho(t_0) > 0 \text{ so dass } c(t_0) + r\nu(t_0) \in U \forall r \in (0, \rho(t_0)),$$

  (dann ist ν die sog. Innere Normale) oder

  $$\forall t_0 \in I, \exists \rho(t_0) > 0 \text{ so dass } c(t_0) + r\nu(t_0) \in U \forall r \in (-\rho(t_0), 0)$$

  (dann ist ν die sog. Aussere Normale).

- [ii] Definition: Eine C^1 reguläre ebene Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ heisst konvex falls: entweder

  $$\langle c(t) - c(t_0), \nu(t_0) \rangle \geq 0 \forall t, t_0 \in I,$$

  oder

  $$\langle c(t) - c(t_0), \nu(t_0) \rangle \leq 0 \forall t, t_0 \in I,$$

  wobei $\nu : I \to \mathbb{R}^2$ die Normale von c ist. Zeigen Sie: c einfach geschlossen und konvex impliziert dass U Konvex ist (wobei U das Innengebiet von c ist).
  —bitte wenden—

Aufgabe 4 *(Maxima)*

Sei $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ C^2 regulär, konvex (sie dürfen Aufgabe 5 benutzen) und einfach geschlossen. Sei $\beta : [0, l] \to \mathbb{R}^2$, $\beta(t) = \alpha(t) - r\nu(t)$, wobei ν die Innere Normale von α ist. Sei U_α (bzw. U_β) dass Innengebiet von α (bzw. β), und k_α (bzw. k_β) die Krümmung von α (bzw. β). Zeigen Sie:

- [i] $L(\beta) = L(\alpha) + 2\pi r$.
- [ii] $A(U_\beta) = A(U_\alpha) + rl + \pi r^2$.
- [iii] $k_\beta = \frac{k_\alpha}{(1+r)}$.

Aufgabe 5 (*) Konvex wieder

Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine C^2 einfach geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Sei $k : I \to \mathbb{R}$ die Krümmung von c. Zeigen Sie: Die Kurve ist genau dann konvex, wenn $k(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (Warnung: nicht so einfach!).

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 28.05.2003 bis 9:15.