
Aufgabe 1 *(Isoperimetrische Ungleichung)*
Sei G ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Zeigen Sie: Falls $4\pi A = L^2$, dann ist G eine Kreisscheibe (der Beweis wurde in der Vorlesung skizziert).

Aufgabe 2 *(Schmiegen)*
Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve, $t_0 \in I$. Sei $\kappa(t_0) \neq 0$. Zeigen Sie:

- [i] Für hinreichend kleines $h > 0$ liegen $c(t_0), c(t_0 - h), c(t_0 + h)$ nicht auf einer Geraden.
- [ii] Die Ebene E_h, die von $c(t_0), c(t_0 - h), c(t_0 + h)$ erzeugt wird, konvergiert für $h \to 0$ gegen die sog. Schmiegebene von c in t_0, d.h. die von $c'(t_0)$ und $c''(t_0)$ aufgespannte Ebene.

Aufgabe 3 *(Winkel)*
Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine C^3-Kurve mit $|c'| = 1$ und $\kappa \neq 0$. Zeigen sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind

- [i] Es existiert ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ mit $|v| = 1$ und ein Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\langle c'(t), v\rangle = \cos\alpha$, für alle $t \in I$.
- [ii] Es existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\frac{\omega(t)}{\kappa(t)} = \cot\alpha$ für alle $t \in I$, wobei ω bzw. κ die Torsion bzw. Krümmung der Kurve ist.

Aufgabe 4 *(Matrizen wieder)*
Sei $V \in C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- [i] $V' = V \cdot A$, $\det V(t_0) = 1$ mit $A \in C^0(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $tr(A) = 0$.
- [ii] $\det V(t) = 1 \forall t \in I$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 04.06.2003 bis 9:15.