
Aufgabe 1 *(Schmiegebene II)* Die Kurve $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, e^{-\frac{1}{t^2}}, 0) & \text{für } t < 0 \\ (0,0,0) & \text{für } t = 0 \\ (t, 0, e^{-\frac{1}{t^2}}) & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass α eine reguläre C^∞-Kurve ist und $\kappa\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine C^∞-Funktion.
2. Zeigen Sie: Für $t \in \mathbb{R}/\{0, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\}$ gilt $\kappa(t) \neq 0$, und $\kappa(0) = 0$.
3. Zeigen Sie: $\nu(t)$ ist nicht stetig in 0.
4. Zeigen Sie: Die Schmiegebene E_t in $t \neq 0$ erfüllt: $\lim_{t \searrow 0} E_t = \{(x,y,z) : y = 0\}$ und $\lim_{t \nearrow 0} E_t = \{(x,y,z) : z = 0\}$

Aufgabe 2 *(Röhrenflächen)* Sei $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre, nach der Bogenlänge parametrisierte C^3 Kurve. Sei (τ, e_2, e_3) ein C^1 begleitendes Dreibein längs α. Die Röhrenfläche mit radius $r > 0$ um α wird parametrisiert durch $X : (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $X(s,\theta) = \alpha(s) + re_2(s)\cos(\theta) + re_3(s)\sin(\theta)$. Sei $l_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, l_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $l_s(\theta) = \alpha(s) + re_2(s)\cos(\theta) + re_3(s)\sin(\theta)$, und $l_\theta(s) = \alpha(s) + re_2(s)\cos(\theta) + re_3(s)\sin(\theta)$.

1. Zeigen Sie dass
$$\langle \frac{d}{ds} l_\theta(s), \frac{d}{d\theta} l_s(\theta)\rangle = 0,$$
falls $\frac{d}{ds}e_i(s) = a_i(s)\tau(s)$, für stetige Funktionen $a_i : (a,b) \to \mathbb{R}$, $i = 2,3$.
2. Kann man immer so ein C^1 begleitendes Dreibein (τ, e_2, e_3) längs α finden mit $\frac{d}{ds}e_i(s) = a_i(s)\tau(s)$?

Aufgabe 3 *(Röhrenflächen II)* Sei α, X wie in Aufgabe 2, und (τ, e_2, e_3) ein C^1 begleitendes Dreibein (τ, e_2, e_3) längs α mit $\frac{d}{ds}e_i(s) = a_i(s)\tau(s)$. Zeigen Sie, dass X genau dann regulär ist, wenn $\kappa(s) < \frac{1}{r}$ für alle $s \in (a,b)$.

Aufgabe 4 *(Bertrand Kurve)*

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ C^3 und regulär (nicht zwingend nach der Bogenlänge parametrisiert). α heisst eine Bertrand-Kurve, falls eine C^3 reguläre Kurve $\hat{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ existiert, so dass alle Normalenlinien gleich sind:

$$\{\hat{\alpha}(t) + s\hat{\nu}(t) : s \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(t) + s\nu(t) : s \in \mathbb{R}\}, \forall t \in I.$$

$\hat{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ heisst eine Bertrand Mate, und es gilt $\hat{\alpha}(t) = \alpha(t) + r(t)\nu(t)$. Zeigen Sie:

1. $r(t)$ ist eine Konstante
2. α ist eine Bertrand Kurve genau dann wenn $A\kappa(t) + B\omega(t) = 1 \forall t \in I$, wobei A, B Konstanten sind.
3. Falls zwei oder mehr Bertrand Mates von α existieren, dann exisitieren unendlich viele.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 18.06.2003 bis 9:15.