
Aufgabe 1 *Rotationsflaĉhe: Katenoide*
Sei $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ mit $\alpha(t) = (x(t), 0, z(t))$ eine Kurve, die ganz in der x-z-Ebene verläuft. Die Menge F, die man erhält, indem man das Bild von α um die z-Achse rotieren lässt, nennt man eine Rotationsfläche.

1. Geben Sie eine Parametrisierung von F an. Wann ist diese Parametrisierung regulär?
2. Berechnen Sie in diesem Fall die Koeffizienten der ersten Fundamentalform.
3. Sei speziell $\alpha(t) = (a \cosh \frac{t}{a}, 0, t)$, wobei $a > 0$ eine Konstante ist. Die Fläche, die durch Rotation von α um die z-Achse entsteht, heißt Katenoid.

   Fertigen Sie eine Skizze an. Berechnen Sie die Koeffizienten der ersten Fundamentalform.

Aufgabe 2 *Längentreu, Flächentreu*
Die Abbildung $\tilde{X}\colon \mathbb{R} \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ mit $\tilde{X}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ beschreibt einen Zylinder, der die Sphäre S^2 längs des Äquators berührt.

1. Zeigen Sie: $\tilde{X}$ ist längentreu.
2. Bezeichne $X(u, v)$ den Schnittpunkt der Strecke von $\tilde{X}(u, v)$ zum Punkt $(0, 0, v)$ mit der S^2. Berechnen Sie $X\colon \mathbb{R} \times (-1, 1) \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass X flächentreu ist, und bestimmen Sie so den Flächeninhalt der Sphäre.

Aufgabe 3 *Tangentenfläche*
Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre, C^2 Frenet Kurve. Sei $X : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die parametrisierte Fläche, die durch $X(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t)$, gegeben ist.

1. Unter welchen Bedingungen ist X an der Stelle (t, v) regulär?
2. Berechnen Sie in diesem Fall die Koeffizienten der ersten Fundamentalform.
3. Geben Sie X explizit an für $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (t, \cos t, \sin t)$.

Aufgabe 4 *Vierecke*
Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine C^1 parametrisierte, reguläre Fläche. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Für jedes rechteck in R^2 mit Kanten parallel zum x- und y-Achse, und Ecken (a, b, c, d) gilt

$$L(F(a), F(b)) = L(F(c), F(d)), \text{ und } L(F(b), F(c)) = L(F(a), F(d)),$$

   wobei $L(F(a), F(b)) =$ Länge der Kurve $\gamma_{ab} : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma_{ab}(s) = F((1 - s)a + sb),$$

   usw.

2. $\frac{\partial}{\partial x^2}(g_{11}) = \frac{\partial}{\partial x^1}(g_{22})$, wobei g_{ij} die erste Fundamental-form ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 25.06.2003 bis 9:15.