Aufgabe 1+2 *Rotationsflächen*
Sei $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), 0, z(t))$ mit $x(t) > 0$ für alle $t \in I$. Berechnen Sie für die durch Rotation um die z-Achse erzeugte Fläche F (siehe Serie 7, Aufgabe 1) die folgenden Grössen:

1. Einheitsnormale N
2. 2. Fundamentalform h
3. Weingartenabbildung S
4. Hauptkrümmungen $\kappa_{1,2}$
5. Hauptkrümmungsrichtungen $v_{1,2}$ und zugehörige Vektoren $DF \cdot v_{1,2} \in \mathbb{R}^3$
6. Mittlere Krümmung H und Gaußkrümmung K

Spezialisieren Sie auf das Katenoid, das heißt

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \alpha(t) = (a \cosh \frac{t}{a}, 0, t) \text{ wobei } a > 0.$$

Aufgabe 3 *Niveaumengen*
Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und $F\colon U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche mit $f(F(x)) = 0$ und $Df(F(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$. Zeigen Sie für $x \in U$ und $v, w \in \mathbb{R}^2$:

$$Df(F(x)) \perp \mathit{Bild}(DF(x)) \quad \text{und} \quad h(x)(v, w) = -\frac{D^2 f(F(x))(DF(x)v, DF(x)w)}{|Df(F(x))|},$$

wobei h die zweite Fundamentalform von F bzgl. der Normalen $N = \frac{Df}{|Df|} \circ F$ ist.

Aufgabe 4 *Kegel*

1. Parametrisieren Sie eine offene Teilmenge des Kegels $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$ mit $a > 0$ so, dass $g_{11} = g_{22} \equiv 1$ und $g_{12} \equiv 0$ ist, wobei g die erste Fundamentalform ist.

   Hinweis: Man kann einen Kegel aus Papier basteln. Versuchen Sie, die „Bastelanleitung" in eine Formel umzusetzen.

2. Für die Parametrisierung in 1.: Berechnen Sie die zweite Fundamentalform, die Hauptkrümmungen, und die Hauptkrümmungsrichungen.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 02.07.2003 bis 9:15.