
Aufgabe 1 *Rotationsflaĉhen konstanter Gausskrümmung*
Sei $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ mit $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ eine Kurve, die ganz in der x-z-Ebene verläuft. Sei $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine Rotationsfläche gegeben durch $F(s,t) = (\cos(t)x(s), \sin(t)x(s), s)$.
Bestimmen Sie für $K_0 \in \{-1, 0, 1\}$ jeweils alle solchen Rotationsflächen, für die $K \equiv K_0$ ist (K ist die Gäusskrümmung), und skizzieren Sie einige davon. Geben Sie dazu jeweils die Formel für $x(s)$ und das maximale Intervall I an, auf dem α definiert werden kann.
Hinweis: Am ende müssen Sie eine gewohnliche Differentialgleichung lösen.

Aufgabe 2 *Rotationsflaĉhen konstanter Mittlere Krümmung*
Sei $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ mit $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ eine Kurve, die ganz in der x-z-Ebene verläuft. Sei $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine Rotationsfläche gegeben durch $F(s,t) = (\cos(t)x(s), \sin(t)x(s), s)$. Bestimmen Sie alle solchen Rotationsflächen mit $H \equiv 0$.
Hinweis: Am ende müssen Sie eine gewohnliche Differentialgleichung lösen.

Aufgabe 3 *Erster Variation* Sei $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine C^2 reguläre Fläche. Sei $h : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ eine C^2 Funktion. Die Normal Variation von F bez. h ist die Funktion $\phi : \Omega \times [-\epsilon, \epsilon] \to \mathbb{R}^3$ die durch

$$\phi(u,v,t) = F(u,v) + th(u,v)\nu(u,v),$$

definiert ist.

- Zeigen Sie: Für $|t|$ klein genug, $F^t : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $F^t(u,v) = F(u,v) + th(u,v)\nu(u,v)$, ist eine C^1 reguläre Fläche.
- Sei $A(t)$ die Flächeninhalt von F^t. Zeigen Sie: $\frac{dA}{dt}(0) = 0$ genau dann wenn $H \equiv 0$ on F.

Aufgabe 4 *Nabelpunkten*
Sei Ω ein offenes, zusammenhängendes Gebiet, und sei $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine C^2 reguläre Fläche.
Definition: $x \in \Omega$ ist ein *Nabelpunkt* von F falls $\kappa_1(x) = \kappa_2(x)$ wobei κ_1, κ_2 die Hauptkrümmungen sind.
Definition: Eine Fläche heisst *planar* (bzw. *sphärish*), falls $\nu(x) \equiv Konstante$ (bzw. falls ein $p \in \mathbb{R}^3$ existiert mit $|F(x) - p| \equiv$ Konstante).
Zeigen Sie: F besteht aus lauter Nabelpunkten genau dann, wenn F planar oder sphärisch ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 09.07.2003 bis 9:15.