Lösungen der Serie 1

Aufgabe 2

Es seien $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f, g \in C^0(K, \mathbb{R}^m)$. Dann ist

$$d(f,g) := \sup_{x \in K} |f(x) - g(x)| \in [0, \infty]$$

Wohldefiniertheit Wir müssen also für die Wohldefiniertheit von d zeigen, dass $d(f,g) < \infty$ ist. Nun sind stetige Bilder kompakter Mengen kompakt, also insbesondere beschränkt. Folglich ist auch $f(K) \cup g(K)$ beschränkt, also in einer Kugel $B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^m$ enthalten. Folglich ist $d(f,g) \leq 2\rho$.

Metrische Eigenschaften

- Es sei $f \neq g$, dann gibt es zumindest ein $y \in K$, für welches $f(y) \neq g(y)$ gilt. Da $\mathbb{R}^m$ ebenfalls die positive Definitheit erfüllt, gilt also

$$d(f,g) = \sup_{x \in K} |f(x) - g(x)| \geq |f(x) - g(x)| > 0$$

- Tatsächlich ist

$$d(f,g) = \sup_{x \in K} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in K} |g(x) - f(x)| = d(g,f)$$

- Es seien $f, g, h \in C^0(K, \mathbb{R}^m)$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(f,h) &= \sup_{x \in K} |f(x) - h(x)| \leq \sup_{x \in K} (|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|) \\ &\leq \sup_{x \in K} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in K} |g(x) - h(x)| = d(f,g) + d(g,h) \end{aligned}$$

Man betrachte $f\colon x \mapsto x$ und $g\colon x \mapsto \frac{1}{x}$. Wählt man den Definitionsbereich $I = (0,1)$ so ist $f(I) = (0,1)$ und $g(I) = (1, \infty)$. Damit ist

$$\sup_{x \in I} |f(x) - g(x)| = \infty$$

Wählt man den unbeschränkten Definitionsbereich $J = [1, \infty]$, so ist $f(J) = [1, \infty]$ und $g(J) = (0,1]$. Auch in diesem Falle beträgt

$$\sup_{x \in J} |f(x) - g(x)| = \infty$$

Aufgabe 3

(a) Die Kurve c ist stückweise stetig differenzierbar. Wir können also die Bogenlängenformel anwenden

$$L(c) = \int_0^4 |\dot{c}(t)| dt = \int_0^4 \sqrt{2} dt = 4\sqrt{2}$$

(b) Diese Kurve ist stetig differenzierbar. Folglich ist

$$L(c) = \int_{-1}^1 \sqrt{n + n \sinh^2 t}\, dt = \sqrt{n} \int_{-1}^1 \cosh t\, dt = \sqrt{n}(\sinh 1 - \sinh(-1)) = 2\sqrt{n} \sinh 1$$