Lösungen Serie 10

Aufgabe 1

(a) Wir betrachten das Gleichungssystem für die Koeffizienten eines Vektors $a = a_1 v_1 + a_2 v_2$. Hier seien v_1, v_2 die Hauptkrümmungsvektoren in einem festen Punkt.

$$\begin{pmatrix} a^1 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \kappa_1 (a^1)^2 + \kappa_2 (a_2)^2 = 0$$
$$(a^1)^2 + (a^2)^2 = 1$$

Dieses Gleichungssystem hat vollen Rang, es sei denn $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, dann aber ist jede Richtung eine Asymptotenrichtung. Außer in diesem Falle werden wir auf folgende Bedingungen geführt:

$$a_1^2 = \frac{\kappa_2}{\kappa_2 - \kappa_1}$$
$$a_2^2 = \frac{\kappa_1}{\kappa_1 - \kappa_2}$$

Ist die Gaußkrümmung positiv, also beide Hauptkrümmungen mit gleichem Vorzeichen, so ist für a_1^2 oder a_2^2 eine negative Zahl gefordert oder der Nenner ist gleich 0. Es treten also keine Asymptotenrichtungen auf.

Für Gaußkrümmung gleich 0 und $\kappa_1 \neq 0$ ist

$$a_1^2 = 0$$
$$a_2^2 = 1$$

Es zeigt also v_2 in Asymptotenrichtung

Ist die Gaußkrümmung negativ, also etwa $\kappa_1 > 0$ und $\kappa_2 < 0$, so ist

$$a_1 = \pm\sqrt{\kappa_2 \kappa_2 - \kappa_1}$$
$$a_2 = \pm\sqrt{\kappa_1 \kappa_1 - \kappa_2}$$

Es gibt also die Asymptotenrichtungen

$$w_\pm = \sqrt{\kappa_2 \kappa_2 - \kappa_1} v_1 \pm \sqrt{\kappa_1 \kappa_1 - \kappa_2} v_2$$

(b) Ist $\kappa_1 = -\kappa_2$, so ergeben sich die Asymptotenrichtungen

$$w_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} v_2,$$

welche aufeinander senkrecht stehen. Stehen umgekehrt die Asymptotenrichtungen senkrecht aufeinander, so nimmt die Weingartenabbildung die Form

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

an. Als Eigenwerte ergeben sich α und $-\alpha$.

Aufgabe 2

Wir bestimmen zunächst die Ableitung von F. Der Kürze halber bezeichnen wir mit $f_u := \frac{\partial f}{\partial u}$ und $f_v := \frac{\partial f}{\partial v}$.

$$DF_{u,v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix}$$

Die Spalten der Ableitung bezeichnen wir mit ∂_u bzw. ∂_v Wir bestimmen weiter die Erste Fundamentalform, den Normalenvektor und die Zweite Fundamentalform:

$$\begin{aligned}
N &= \frac{1}{\sqrt{1+f_u^2}\sqrt{1+f_v^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix} = (1+f_u^2)^{-1/2}(1+f_v^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{pmatrix} \\
g_{uu} &= 1+f_u^2 \\
g_{uv} &= f_u f_v \\
g_{vv} &= 1+f_v^2 \\
\det(g) &= 1+f_u^2+f_v^2 \\
g^{uu} &= \frac{1}{\det g}(1+f_v^2) \\
g^{uv} &= -\frac{1}{\det g} f_u f_v \\
g^{vv} &= \frac{1}{\det g}(1+f_u^2) \\
h_{uu} &= \langle \partial_u \partial_u, N \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{uu} \end{pmatrix}, N \right\rangle = \frac{f_u u}{\sqrt{(1+f_u^2)(1+f_v^2)}} \\
h_{uv} &= \langle \partial_u \partial_v, N \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{uv} \end{pmatrix}, N \right\rangle = -\frac{f_{uv}}{\sqrt{(1+f_u^2)(1+f_v^2)}} \\
h_{vv} &= \langle \partial_v \partial_v, N \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{vv} \end{pmatrix}, N \right\rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{(1+f_u^2)(1+f_v^2)}}
\end{aligned}$$

Daraus läßt sich schon einmal die Gaußkrümmung ablesen:

$$K = \frac{\det h}{\det g} = \frac{f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2}{(1+f_u^2)(1+f_v^2)(1+f_u^2+f_v^2)}$$

Für die mittlere Krümmung bestimmen wir die kurz noch die Diagonale des Weingartenoperators

$$\begin{aligned}
S_u^u &= g^{uu} h_{uu} + g^{uv} h_{uv} = \frac{(1+f_v^2) f_{uu}}{(1+f_u^2+f_v^2)\sqrt{(1+f_u^2)(1+f_v^2)}} \\
S_v^v &= g^{vu} h_{uv} + g^{vv} h_{vv} = \frac{(1+f_u^2) f_{vv}}{(1+f_u^2+f_v^2)\sqrt{(1+f_u^2)(1+f_v^2)}}
\end{aligned}$$

Die mittlere Krümmung ist also

$$H = \frac{(1+f_v^2) f_{uu} + (1+f_u^2) f_{vv}}{2(1+f_u^2+f_v^2)\sqrt{(1+f_u^2)(1+f_v^2)}}$$

Aufgabe 3

Es ist

$$DF\nabla_\xi f\eta = \big(D_\xi(D_{f\eta}F)\big)^\top = \big(D_\xi(fD_\eta F)\big)^\top = D_\xi(f)\big(D_\eta F\big)^\top + f\big(D_\xi(D_\eta F)\big)^\top = D_\xi(f)DF\eta + fDF\nabla_\xi\eta$$

Da DF punktweise ein Monomorphismus ist, gilt die Behauptung

$$\nabla_\xi f\eta = D_\xi(f)\eta f\nabla_\xi\eta$$

Aufgabe 4

Es ist

$$F\colon \begin{pmatrix} t \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ z(t), \end{pmatrix}$$

wobei $\dot{r}^2 + \dot{z}^2 = 1$ sei. Die Ableitung von F ist

$$DF = \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \dot{r}\sin\varphi & r\cos\varphi \\ \dot{z} & 0 \end{pmatrix} =: (\partial_t, \partial_\varphi)$$

Die Normale ist

$$N = \begin{pmatrix} -\dot{z}\cos\varphi \\ -\dot{z}\sin\varphi \\ \dot{r} \end{pmatrix}$$

Nun sind die zweiten Ableitungen zu bestimmen und bezüglich der orthogonalen Vektoren $(\partial_t, \partial_\varphi, N)$ zu beschreiben. Man erhält die Komponenten über das Skalarprodukt, wobei $|\partial_\varphi| = r$ zu beachten ist.

$$\partial_t\partial_t = \begin{pmatrix} \ddot{r}\cos\varphi \\ \ddot{r}\sin\varphi \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = (-\dot{z}\ddot{r} + \ddot{r}\dot{z})N$$

$$\partial_t\partial_\varphi = \begin{pmatrix} -\dot{r}\sin\varphi \\ \dot{r}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\dot{r}}{r}\partial_\varphi$$

$$\partial_\varphi\partial_\varphi = \begin{pmatrix} -r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -r\dot{r}\partial_r + r\dot{z}N$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Christoffelsymbole ablesen:

$$\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{\dot{r}}{r}$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r\dot{r}$$

Alle anderen Christoffelsymbole sind gleich Null.