

Lösungen Serie 3

Aufgabe 1

Wir suchen zunächst den Tangentialvektor. Da dieser ein Einheitsvektor ist, setzen wir $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ und machen den Ansatz

$$T(t) = e^{if(t)}$$

Dann ist

$$T'(t) = if'(t)e^{if(t)}$$

und folglich muß

$$f'(t) = k(t)$$

sein, also $f(t) = \arcsin(t)$. Der Tangentialvektor ist also

$$T(t) = e^{i \arcsin(t)}$$

oder in $\mathbb{R}^2$

$$T(t) = \begin{pmatrix} \cos \arcsin t \\ \sin \arcsin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-t^2} \\ t \end{pmatrix}$$

Um die Kurve selbst zu erhalten, müssen wir noch einmal integrieren.

$$\gamma(T) = \int_0^T \begin{pmatrix} \sqrt{1-t^2} \\ t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\arcsin T + T\sqrt{1-T^2}) \\ \frac{1}{2}T^2 \end{pmatrix}$$

Man beachte die willkürliche Wahl eines Orts- und eines Tangentialvektors in $t = 0$. Bei einer anderen Wahl eines Tangentialvektors erhält man eine um einen Winkel gedrehte Kurve, bei Wahl eines anderen Ortsvektors eine verschobene Kurve.

Aufgabe 2

Es sei im folgenden $s \in rI$.

(a) Es ist

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} \left(r \tilde{\alpha} \left(\frac{s}{r} \right) \right) \right| = \left| \frac{r}{r} \dot{\alpha} \left(\frac{s}{r} \right) \right| = 1$$

Daraus folgt die Behauptung.

(b) Die Tangentialvektoren von α und $\tilde{\alpha}$ sind identisch:

$$\frac{\partial}{\partial s} \tilde{\alpha}(s) = \frac{r}{r} \alpha' \left(\frac{s}{r} \right)$$

Jedoch für die Krümmung und Normalenvektor ergibt sich

$$\tilde{\kappa}(s) \tilde{N}(s) = \frac{\partial}{\partial s} \alpha' \left(\frac{s}{r} \right) = \frac{1}{r} \alpha'' \left(\frac{s}{r} \right)$$

Es ist also

$$\tilde{\kappa}(s) = \frac{1}{r} \kappa \left(\frac{s}{r} \right) \quad \tilde{N}(s) = N \left(\frac{s}{r} \right)$$

Für die Torsion erhalten wir

$$\tilde{\tau}(s) = \left\langle \frac{\partial}{\partial s} N \left(\frac{s}{r} \right), B \left(\frac{s}{r} \right) \right\rangle = \frac{1}{r} \left\langle N' \left(\frac{s}{r} \right), B \left(\frac{s}{r} \right) \right\rangle = \frac{1}{r} \tau \left(\frac{s}{r} \right)$$

Aufgabe 3

Setze $f(t) := \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle$. Die Bedingung, dass $\alpha(t_0)$ maximal ist, führt auf

$$\dot{f}(t_0) = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{f}(t_0) \leq 0 \quad (2)$$

Aus (1) folgt $\langle c(t_0), \dot{c}(t_0) \rangle = 0$, insbesondere steht in t_0 der Ortsvektor senkrecht auf dem Tangentialvektor $\langle c(t_0), T(t_0) \rangle = 0$. Aus (2) folgt dann

$$\begin{aligned} 0 &> \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle + \langle c, \ddot{c} \rangle = |\dot{c}|^2 + \langle c, \dot{v}T + v^2\kappa N \rangle \\ \Rightarrow 0 &> 1 + \kappa \langle c, N \rangle \\ \Rightarrow \kappa |c| &> 1 \end{aligned}$$

Man beachte, dass für positive Krümmung $\langle c, N \rangle > 0$ sein muß, da sonst eine negative Zahl größer 1 sein müsste.