Lösungen der Aufgabenserie 4

Aufgabe 1

(a) Es sei $I = [a, b]$. Wir setzen zunächst

$$\begin{aligned} v(t) &:= |\tfrac{d}{dt}c(t)| \\ \sigma(t) &:= \int_a^t v(t)dt \end{aligned}$$

Der Tangentialvektor ist dann

$$T(s) = \frac{d}{ds}c(\sigma^{-1}(s)) = \frac{1}{\dot\sigma(\sigma^{-1}(s))}c'(\sigma^{-1}(s))$$

Und an der Stelle $s = \sigma(t)$ ist der Tangentialvektor

$$T(\sigma(t)) = \frac{1}{v(t)}c'(t)$$

Für die Ableitung des Tangentialvektors gilt:

$$\frac{d}{dt}T(\sigma(t)) = v(t)T'(\sigma(t)) = v(t)\kappa(\sigma(t))N(\sigma(t)),$$

was zu zeigen war.

(b) Es ist

$$\begin{aligned} c' &= vT \\ c'' &= v'T + vT' = v'T + v^2\kappa N \\ \langle c''', B\rangle &= \langle v^2\kappa N', B\rangle = v^3\kappa\tau \end{aligned}$$

Es ist dann

$$\det(c', c'', c''') = \det(vT, v^2\kappa N, v^3\kappa\tau B),$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt, da $\langle c'', N\rangle = \kappa v^2$ ist.

Aufgabe 4

1. Die Parametrisierung ist

$$c\colon t \mapsto \begin{cases} (t, 1-t^2), & -1 \le t < 1 \\ \big((2-t) + \frac{1}{2}(t-1), 1-t\big) & 1 \le t < 2 \\ \big(\frac{1}{2}(3-t) + \frac{1}{2}(2-t), t-3\big), & 2 \le t < 3 \\ \big(-\frac{1}{2}\cos\pi(t-3), \frac{1}{2}\sin\pi(t-3)\big), & 3 \le t < 4 \\ \big(\frac{1}{2}(5-t) + \frac{1}{2}(4-t), 4-t\big), & 4 \le t < 5 \\ \big(\frac{1}{2}(t-6) + (5-t), (t-6)\big), & 5 \le t < 6 \end{cases}$$

Oder vereinfacht

$$c\colon t \mapsto \begin{cases} (t, 1-t^2), & -1 \le t < 1 \\ \big(-\frac{t}{2} + \frac{3}{2}, 1-t\big) & 1 \le t < 2 \\ \big(\frac{5}{2} - t, t-3\big), & 2 \le t < 3 \\ \big(-\frac{1}{2}\cos\pi(t-3), \frac{1}{2}\sin\pi(t-3)\big), & 3 \le t < 4 \\ \big(\frac{9}{2} - t, 4-t\big), & 4 \le t < 5 \\ \big(-\frac{t}{2} + 2, t-6\big), & 5 \le t < 6 \end{cases}$$

2. Es ist $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$. Folglich

$$r(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + (1-t^2)^2}, & -1 \leq t < 1 \\ \sqrt{\frac{1}{4}(t-3)^2 + (1-t)^2}, & 1 \leq t < 2 \\ \sqrt{(\frac{5}{2}-t)^2 + (t-3)^2}, & 2 \leq t < 3 \\ \frac{1}{2}, & 3 \leq t < 4 \\ \sqrt{(\frac{9}{2}-t)^2 + (4-t)^2}, 4 \leq t < 5 \\ \sqrt{(2-\frac{t}{2})^2 + (t-6)^2}, 5 \leq t \leq 6 \end{cases}$$

Die Winkelfunktion ist

$$\varphi(t) = \begin{cases} \arctan(\frac{t}{1-t^2}), & -1 \leq t < 1 \\ -\frac{\pi}{2} + \arctan(\frac{2(1-t)}{(3-t)}, & 1 \leq t < 2 \\ -\pi + \arctan(\frac{\frac{5}{2}-t}{t-3}), & 2 \leq t < 3 \\ -2\pi - \pi(t-3), & 3 \leq t < 4 \\ -3\pi + \arctan(\frac{\frac{9}{2}-t}{4-t}), & 4 \leq t < 5 \\ -3\pi + \arctan(\frac{-\frac{t}{2}+2}{t-6}), & 5 \leq t \leq 6 \end{cases}$$

Hier gelten die üblichen stetigen Fortsetzungen $\arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$. Wir sehen also, dass die Umlaufzahl um die Null -4π beträgt.