Lösungen der Aufgabenserie 5

Aufgabe 1

Wir nehmen an, dass c bogenlängenparametrisiert ist. Ansonsten parametrisiere c um.

1. Es ist
$$|\kappa_c| = |\langle c'', \nu\rangle| = |c''|$$
Da $c'' \perp T$ und $c'' \perp e_3$ ist, sind ν und c'' also parallel. Daher gilt die letzte Gleichheit.

2. Es ist $B = T \times N = \pm e_3$ (vgl d). Man sieht aber, dass $\tilde{c}''' = (c''', 0)$, so dass $\langle c''', e_3\rangle = 0$.

3. Man sieht an (1): Ist κ_c positiv, so ist $\nu = N$. Wenn aber κ_c negativ ist, so ist $\nu = -N$.

4. Nach Definition von ν, besitzt (T, ν) die gleiche Orientierung wie (e_1, e_2). Folglich bilden (T, ν, e_3) eine positiv orientierte Basis. Im Falle $N = \nu$ bildet (T, N, e_3) eine positive Basis und folglich ist $B = e_3$. Im Falle $N = -\nu$ bildet $(T, N, -e_3)$ eine positiv orientierte Basis und daher ist $B = -e_3$.

Aufgabe 2

Die Ableitung von F ist konstant $F' = S$. Nach der Kettenregel gilt $(F \circ c)' = S \circ c'$. Nach Definition bilden (c', ν) einen orientierten orthonormalen Rahmen. Dann sind auch $(Sc', S\nu)$ zumindest orthonormal. Richtig orientiert ist $(Sc', (\det S)S\nu)$. Folglich ist $\tilde{\nu} = (\det S)S\nu$ und es gilt für die orientierte Krümmung von $F \circ c$:

$$\tilde{\kappa} = \langle Sc', \tilde{\nu}\rangle = \langle Sc', (\det S)S\nu\rangle = \det S\langle c', \nu\rangle = \kappa \det S$$

Aufgabe 3

Nach Definition gilt
$$\langle T', \nu\rangle = \kappa$$
und da $\langle T, T\rangle' = 0$ ist, gilt
$$\langle T', T\rangle = \tfrac{1}{2}\langle T, T\rangle' = 0$$
Folglich ist
$$T' = \kappa\nu$$
Desweiteren ist
$$\begin{aligned}\langle \nu', \nu\rangle &= \tfrac{1}{2}\langle \nu, \nu\rangle' = 0\\ \langle \nu', T\rangle &= -\langle \nu, T'\rangle = -\kappa\end{aligned}$$
und daher
$$\nu' = -\kappa T$$

Aufgabe 4

Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $r = 0$ ist. Dies läßt sich durch eine orthogonale Transformation immer erreichen.

Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Angenommen γ sei eine Kurve von $(1, 0, 0)$ nach $\tilde{\gamma}(s)$, deren Länge gleich s ist. Nun nehmen wir an, das γ nicht auf einem Großkreisbogen liegt. Es gibt also wenigstens einen Punkt $z = \gamma(q)$, der auf dem anderen Großkreisbogen $\{(\sqrt{1 - t^2}y, t) \mid$

$t \in \mathbb{R}\}$, $y \neq x$ liegt. Sei also $z = (\sqrt{1-u^2}y, u)$. Dann ist die Länge $L(\gamma|_{[0,q]}) \geq L(\tilde{\gamma}|_{[0,u]} = u$. Es ist nun

$$\begin{aligned} L(\gamma|_{[q,p]}) &\geq \arccos(\langle \gamma(p), \gamma(q) \rangle) \\ &= \arccos(\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-u^2}\langle x, y \rangle + su) \\ &> \arccos(\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-u^2}|x|^2 + su) \\ &= \arccos(\tilde{\gamma}(u), \tilde{\gamma}(s)) \\ &= L(\tilde{\gamma}|_{[u,s]}) \end{aligned}$$

Die Ungleichung gilt wegen der strengen Monotonie des Arkuskosinus. Nun schreiben wir alles zusammen und haben also:

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{[0,q]} + L(\gamma|_{[q,p]} > L(\tilde{\gamma}|_{[0,u]} + L(\tilde{\gamma}|_{[u,s]} = L(\tilde{\gamma})$$

Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von γ.