Lösungen der Aufgabenserie 6

Aufgabe 1

(a) Es ist die Umlaufzahl der Kurve

$$\dot{\gamma}\colon t \mapsto (-\sin t, 2\cos 2t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

zu bestimmen. Es ist $\sin t = 0$ für $t = k\pi, k = 0, 1, 2$. Für diese Werte gilt $2\cos 2k\pi = 1$. Also schneidet γ die Gerade $x = 0$ nur im Punkte $(0, 1)$. Wir können also folgende Homotopie in $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ anwenden:

$$\Gamma\colon (s, t) \mapsto (-\sin t, s + (1-s)2\cos 2t), \qquad s \in [0, 1], t \in [0, 2\pi]$$

Die Kurve $\Gamma(1, \cdot)\colon t \mapsto (-\sin t, 1)$ läßt sich noch weiter in $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ zusammenziehen zu einer konstanten Kurve. Folglich ist

$$ind(\gamma) = n(\dot{\gamma}, 0) = 0$$

(b) Erst einmal ist

$$\dot{\gamma}(t) = (\sin(-t), \cos t) = -\overline{e^{it}}$$

Wir bestimmen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\dot{\gamma}} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\overline{ie^{it}}}{\overline{e^{it}}} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \overline{ie^{it}} e^{it} dt = -1$$

(c) Wir bestimmen wiederum

$$\dot{\gamma}(t) = -2\cos t e^{it} + i(1 - 2\sin t)e^{it} = -2e^{2it} + ie^{it}$$

Wir wenden wiederum eine Homotopie in $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ an:

$$(s, t) \mapsto (1-s)ie^{it} - 2e^{2it}$$

Die Kurve $t \mapsto -2e^{2it}$ hat aber Umlaufzahl 2 um die 0.

Aufgabe 2

Wir nutzen die Winkelfunktion, die wir bereits in Aufgabe 4, Blatt 4 bestimmt haben.

$$\varphi(t) := \begin{cases} \arctan(\frac{t}{1-t^2}), & -1 \le t < 1 \\ -\frac{\pi}{2} + \arctan(\frac{2(1-t)}{(3-t)}, 1 \le t < 2 \\ \dots \\ -3\pi + \arctan(-\frac{\frac{t}{2}+2}{t-6})5 \le t < 6 \end{cases}$$

Die Umlaufzahl ist

$$\frac{1}{2\pi}(\varphi(6) - \varphi(-1)) = \frac{1}{2\pi}(-3\pi + \arctan(\infty) - \varphi(-\infty)) = -2$$

Aufgabe 3