Lösungen Aufgabenserie 7

Aufgabe 1

(a) Die Ableitung von F ist

$$DF|_{t,\varphi} = \begin{pmatrix} \dot r(t)\cos\varphi & -r(t)\sin\varphi \\ \dot r(t)\sin\varphi & r(t)\cos\varphi \\ \dot z(t) & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Die Matrix der ersten Fundamentalform $G = DF^T DF$ ist

$$DF^T DF = \begin{pmatrix} \dot r(t)\cos\varphi & \dot r(t)\sin\varphi & \dot z(t) \\ -r(t)\sin\varphi & r(t)\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot r(t)\cos\varphi & -r(t)\sin\varphi \\ \dot r(t)\sin\varphi & r(t)\cos\varphi \\ \dot z(t) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot r(t)^2 + \dot z(t)^2 & 0 \\ 0 & r(t)^2 \end{pmatrix}$$

(c) Die Normalenrichtung zeigt in Richtung des Kreuzproduktes der beiden Spalten von $DF = (\partial_t, \partial_\varphi)$. Wir normieren gleich beide Vektoren ∂_t und ∂_φ. Dann erhalten wir als Kreuzprodukt die Einheitsnormale.

$$N = \frac{1}{r\sqrt{\dot r^2 + z^2}} \begin{pmatrix} \dot r\cos\varphi \\ \dot r\sin\varphi \\ \dot z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\dot r^2 + \dot z^2}} \begin{pmatrix} \dot z\cos\varphi \\ \dot z\sin\varphi \\ \dot r \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Es sei F eine parametrisierte Fläche. Setze $A := DF|_{s,t}$.Dann ist die Matrix der ersten Fundamentalform G in (s,t) definiert als

$$G|_{s,t}(v,w) = \langle Av, Aw\rangle = \langle v, A^T A w\rangle$$

Die Matrix $A^T A$ ist symmetrisch ($(A^T A)^T = A^T A$), positiv definit (für einen Vektor $v \neq 0$ ist $\langle v, Av\rangle \geq 0$). Folglich definiert

$$g_F|_{s,t}(v,w) = \langle v, A^T A w\rangle$$

ein positiv definites Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3

(a) Die Gerade durch n und $p = (x,t)$ besteht aus den Punkten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-\sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma x_1 \\ \sigma x_2 \\ \sigma t \end{pmatrix}$$

Den Schnittpunkt mit der $x_3 = 0$-Ebene finden wir durch Nullsetzen der dritten Koordinate. Es gilt für den Schnittpunkt $\sigma = \frac{1}{1-t}$.

(b) Wir bestimmen die Umkehrabbildung mit Hilfe der Gleichungen

$$y_1 = \frac{x_1}{1-t}, \qquad y_2 = \frac{x_2}{1-t}, \qquad x_1^2 + x_2^2 + t^2 = 1$$

Es ist also $x_i = (1-t)y_i, i = 1,2$ und durch Einsetzen in die letzte Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} (1-t)^2(y_1^2 + y_2^2) + t^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow y_1^2 + y_2^2 = \frac{1-t^2}{(1-t)^2} &= \frac{1+t}{1-t} \\ \Leftrightarrow |y|^2(1-t) &= 1+t \\ \Leftrightarrow |y|^2 - 1 = (1+|y|^2)t \Leftrightarrow t &= \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\Psi(y_1, y_2) = \frac{1}{1+|y|^2}(2y_1, 2y_2, |y|^2 - 1)$$

Die einzelnen Spalten der Ableitung von Ψ sind

$$\partial_{y_1} = \frac{1}{1+|y|^2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2y_1 \end{pmatrix} - \frac{2y_1}{(1+|y|^2)^2}\begin{pmatrix} 2y_1 \\ 2y_2 \\ |y|^2 - 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{(1+|y|^2)^2}\begin{pmatrix} 1+|y|^2 - 2y_1^2 \\ -2y_1 y_2 \\ 2y_1 \end{pmatrix}$$

$$\partial_{y_2} = \frac{1}{1+|y|^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2y_2 \end{pmatrix} - \frac{2y_2}{(1+|y|^2)^2}\begin{pmatrix} 2y_1 \\ 2y_2 \\ |y|^2 - 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{(1+|y|^2)^2}\begin{pmatrix} -2y_1 y_2 \\ 1+|y|^2 - 2y_2^2 \\ 2y_2 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizienten der Ersten Fundamentalform sind also

$$\langle \partial_{y_1}, \partial_{y_1} \rangle = \frac{4}{(1+|y|^2)^4}\left((1+|y|^2 - 2y_1^2)^2 + 4y_1^2 y_2^2 + 4y_1^2\right) = \frac{4}{(1+|y|^2)^2}$$

$$\langle \partial_{y_1}, \partial_{y_2} \rangle = \frac{4}{(1+|y|^2)^4}\left(-2y_1y_2(2 + 2|y|^2 - 2y_1^2 - 2y_2^2) - 4y_1y_2\right) = 0$$

$$\langle \partial_{y_2}, \partial_{y_2} \rangle = \cdots = \frac{4}{(1+|y|^2)^2}$$

Aufgabe 4

Wir wählen wie in der Anleitung eine Folge $p_k \to p$ mit $p_k \in \mathbb{R}\backslash K$. Da K abgeschlossen ist und das Minimum notwendigerweise im Kompaktum $K \cap \overline{B}_R(p_k)$ —für R hinreichend groß— angenommen werden muß, gibt es einen Punkt $q_k \in K$ mit

$$|q_k - p_k| = \min_{q \in K} |q - p_k|$$

Wir zeigen, dass

$$K \subset H_k = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - q_k, \nu_k \rangle \geq 0 \,\}$$

Angenommen nicht; dann gibt es einen Punkt $y \in K$ mit

$$\langle y - q_k, \nu_k \rangle < 0.$$

Da K konvex ist, gilt auch

$$(1-t)q_k + ty \in K \qquad \forall t \in [0,1]$$

Wir wählen Koordinaten im affinen Raum, so dass $q_k = 0$ und leiten die Abstandsfunktion zu p_k nach t ab

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} f(t) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \langle ty - p_k, ty - p_k \rangle = -2\langle y, p_k \rangle < 0$$

Folglich besitzt der Punkt $(1-t)q_k + ty$ für kleine t kürzeren Abstand zu p_k als q_k, was der Minimalität von q_k widerspricht.

Folglich liegt K in H_k. Da die Folge ν_k in S^{n-1} verläuft, besitzt sie eine konvergente Teilfolge $\nu_{k_j} \to \nu$. Wegen der Stetigkeit des Skalarprodukt gilt für jeden Punkt $x \in K$:

$$\langle x - p, \nu \rangle = \langle x - \lim_j q_{k_j}, \lim_j \nu_{k_j} \rangle = \lim_j \langle x - q_{k-j}, \nu_{k_j} \rangle \geq 0$$