Lösungen Aufgabenserie 8

Aufgabe 1

(a) Es ist

$$\frac{d}{dt}F \circ \gamma(t) = DF|_{\gamma(t)}\dot{\gamma}(t)$$

Folglich gilt für die Bogenlänge der Kurve $F \circ \gamma$:

$$L(F \circ \gamma) = \int_I \left| \frac{d}{dt}F \circ \gamma \right| dt = \int_I \sqrt{\langle DF|_{\gamma(t)}\dot{\gamma}(t), DF|_{\gamma(t)}\dot{\gamma}(t) \rangle} dt = \int_I \sqrt{g(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt$$

(b) Es ist

$$\cos \angle(DF|_x v, DF|_x w) = \frac{\langle DF|_x v, DF|_x w \rangle}{\langle DF|_x v, DF|_x v \rangle^{1/2} \langle DF|_x w, DF|_x w \rangle^{1/2}} = \frac{g|_x(v, w)}{\sqrt{g|_x(v, v)g|_x(w, w)}}$$

Aufgabe 2

Die Standardparametrisierung des Zylinders mit Winkel $\frac{\varphi}{R}$ ist längentreu

$$F: (\varphi, z) \mapsto \begin{pmatrix} R \cos \frac{\varphi}{R} \\ R \sin \frac{\varphi}{R} \\ z \end{pmatrix}$$

Die Ableitung ist

$$DF = \begin{pmatrix} \sin \frac{\varphi}{R} & 0 \\ -\cos \frac{\varphi}{R} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit ist

$$G = DF^T DF = \mathbf{1},$$

also F längentreu.

Aufgabe 3

Die Ableitung von F ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{cx_1}{|x|} & \frac{cx_2}{|x|} \end{pmatrix}$$

Damit ist die Matrix der Ersten Fundamentalform

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{c^2 x_1^2}{|x|^2} & \frac{c^2 x_1 x_2}{|x|^2} \\ \frac{c^2 x_1 x_2}{|x|^2} & 1 + \frac{c^2 x_2^2}{|x|^2} \end{pmatrix}$$

Es ist

$$\det G = \left(1 + c^2 \frac{x_1^2}{|x|^2}\right) \left(1 + \frac{c^2 x_2^2}{|x|^2}\right) - c^4 \frac{x_1^2 x_2^2}{|x|^4} = 1 + c^2$$

Es ist dann

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^R (1 + c^2) r dr = \pi(1 + c^2)R^2$$