Lösungen Serie 9

Aufgabe 1

- (a) (konzeptueller Beweis) Der Satz von Riesz besagt, dass das Skalarprodukt einen Isomorphismus liefert von V in seinen Dualraum V^* .

$$b: v \mapsto g(\cdot, v)$$

Die Umkehrabbildung bezeichnen wir mit $\sharp: V^* \rightarrow V$. Nun ist eine Bilinearform eine lineare Abbildung von V nach V^* , wenn man sie als Abbildung

$$\tilde{h}: v \mapsto h(\cdot, v)$$

betrachtet. Definiere S durch

$$Sv := (\tilde{h}v)^\sharp \quad v \in V \quad (1)$$

Dann ist

$$g(v, Sw) = (Sw)^\flat v = (\tilde{h}w)^\sharp v = (\tilde{h}w)v = h(v, w)$$

(Beweis mit Satz von Sylvester) Es gibt eine Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_n$ bezüglich g ; setze $S(e_i) := \sum_j h_{ij} e_j$; Rest ist klar.

(Beweis mit Koordinaten) Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von V mit dualer Basis $e^1, \dots, e^n$, also $e^i(e_j) = \delta_{ij}$. Dann ist

$$g(e_i, \cdot) = \sum_j g_{ij} e^j \quad \text{in } V^*,$$

also (g_{ij}) die Matrix des Rieszisomorphismus b . Es sei (g^{ij}) die Inverse Matrix zu (g_{ij}) , also die Matrix zu $\sharp$. Wie in (1) setzen wir

$$S_i^k := \sum_j g^{kj} h_{ji}$$

Alles weitere folgt.

- (b) Ist h symmetrisch, so gilt

$$g(v, Sw) = h(v, w) = h(w, v) = g(w, Sv) = g(Sv, w)$$

Aufgabe 2

- (a) Wir kennen aus der Vorlesung das Transformationsverhalten des Weingartenoperators S

$$\tilde{S}|_v = (D\Phi)^{-1}|_v S|_{\Phi v} D\Phi|_v$$

Bilden wir die Spur auf beiden Seiten, so sehen wir

$$\tilde{H}|_v = H|_{\Phi v}$$

- (b) Nach Aufgabe 1 sind die Komponenten des Weingartenoperators $S_{ik} = \sum_{j=1}^2 g^{ij} h_{jk}$. Bilden wir die Spur und teilen durch Zwei, so erhalten wir

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} h_{ij}$$

- (c) Da der Endomorphismus $S(x)$ symmetrisch und daher diagonalisierbar ist, ist seine Spur bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren $\text{tr } S = \lambda_1 + \lambda_2$ die Summe der Eigenwerte. Der Basisinvarianz der Spur zuliebe muß also auch bezüglich der Standardbasis $\text{tr } S = \lambda_1 + \lambda_2$ sein.

Aufgabe 3

(a) Die Rotationsfläche hat die Parametrisierung

$$F: (t, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r(t) \cos \varphi \\ r(t) \sin \varphi \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Wie schon vorher bestimmt, sind die Spalten der Ableitung und der Normalenvektor

$$\partial_t = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad \partial_\varphi = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad N = \frac{1}{\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2}} \begin{pmatrix} -\dot{z} \cos \varphi \\ -\dot{z} \sin \varphi \\ \dot{r} \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist

$$g_{11} = \dot{r}^2 + \dot{z}^2 \quad g_{12} = 0 \quad g_{22} = r^2$$

Die zweiten Ableitungen sind

$$\partial_t \partial_t = \begin{pmatrix} \ddot{r} \cos \varphi \\ \ddot{r} \sin \varphi \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \quad \partial_t \partial_\varphi = \begin{pmatrix} -\dot{r} \sin \varphi \\ \dot{r} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \partial_\varphi \partial_\varphi = \begin{pmatrix} -r \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Komponenten der Zweiten Fundamentalform bestimmt man mittels der Weingartenformel

$$h_{11} = \langle \partial_t \partial_t, \nu \rangle = \frac{1}{\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2}} \left\langle \begin{pmatrix} \ddot{r} \cos \varphi \\ \ddot{r} \sin \varphi \\ \ddot{z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\dot{z} \cos \varphi \\ -\dot{z} \sin \varphi \\ \dot{r} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{-\ddot{r} \dot{z} + \dot{z} \ddot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2}}$$

$$h_{12} = \langle \partial_t \partial_\varphi, \nu \rangle = \frac{1}{\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2}} \left\langle \begin{pmatrix} -\dot{r} \sin \varphi \\ \dot{r} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\dot{z} \cos \varphi \\ -\dot{z} \sin \varphi \\ \dot{r} \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$h_{22} = \langle \partial_\varphi \partial_\varphi, \nu \rangle = \frac{1}{\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2}} \left\langle \begin{pmatrix} -r \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\dot{z} \cos \varphi \\ -\dot{z} \sin \varphi \\ \dot{r} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{r \dot{z}}{\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2}}$$

Und folglich ist

$$S = (g^{ij} h_{jk}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\dot{r}^2 + \dot{z}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\dot{r} \dot{z} - \ddot{r} \dot{z}}{\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2}} & 0 \\ 0 & \frac{r \dot{z}}{\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{r} \dot{z} - \ddot{r} \dot{z}}{(\dot{r}^2 + \dot{z}^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{r \dot{z}}{\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2}} \end{pmatrix}$$

(b) Für das Katenoid

$$r(t) = \cosh t, \quad z(t) = t$$

ergibt sich folglich

$$S_{11} = -\frac{\cosh t}{(\sinh^2 t + 1)^{3/2}} = -\cosh^{-2} t \quad S_{22} = \frac{\cosh t}{\cosh^2 t \sqrt{\sinh^2 t + 1}} = \cosh^{-2} t$$

und damit $H = 0$.

Aufgabe 4

Wir nennen $\beta := F \circ \gamma$,

$$\begin{aligned} \kappa \cos \theta &= \kappa \langle \nu|_0, N|_{\gamma(0)} \rangle \\ &= \langle \dot{T}|_0, N|_{\gamma(0)} \rangle \\ &= \langle |\dot{\beta}|_0|^{-2} \dot{\beta}|_0, N|_{\gamma(0)} \rangle \\ &= \langle |\dot{\beta}|_0|^{-2} (D^2 F|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0)), N|_{\gamma(0)}) \rangle \\ &= |\dot{\beta}|_0|^{-2} D^2 F h(\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0)) \end{aligned}$$