

Aufgabe 1 (*Taylorentwicklung einer Kurve*) Es sei $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine bogenlängenparametrisierte Kurve im Punkte $c(0)$.

- (a) Beschreiben Sie $c'(0)$, $c''(0)$ und $c'''(0)$ mittels Krümmung κ , Torsion τ und dem Frenetschen Dreibein (T, N, B) .
- (b) Stellen Sie die Taylornäherung dritter Ordnung von c auf.
- (c) Skizzieren Sie die zweite Taylornäherung von c .

Aufgabe 2 (*Der Schmiegekreis*) Es sei c eine Kurve wie in Aufgabe 1 und es sei $c(0) = 0$, sowie $c''(0) \neq 0$.

- (a) Die Ebene $\langle T, N \rangle$ wird Schmiegeebene genannt, denn die Projektion \tilde{c} von c auf $\langle T, N \rangle^\perp$ besitzt verschwindende erste und zweite Ableitung, was zu zeigen ist.
- (b) Wir konstruieren nun den Schmiegekreis an c in 0. Wir suchen einen Kreis mit Mittelpunkt p und Radius r in der Schmiegeebene, so dass

$$f(t) := (c(t) - p)^2 - r^2$$

bis zweiter Ordnung verschwindet, d.h. $f(0) = \dot{f}(0) = \ddot{f}(0) = 0$. ($f(t)$ beschreibt das Quadrat der Entfernung der Kurve vom Kreis.) Man leite f zweimal ab.

- (c) Schreiben Sie die Gleichungen $f(0) = 0$, $\dot{f}(0) = 0$, $\ddot{f}(0)$ mittels p und r , der Krümmung κ und den Vektoren T und N .
- (d) Finden Sie die Koeffizienten α, β von

$$p = \alpha T + \beta N$$

Was ist r ?