

Aufgabe 1 (*Parallelverschiebung*) Es sei $F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte, glatte Fläche und $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ eine glatte Kurve. Wir definieren die *Parallelverschiebung* eines Vektors $v_0 \in \mathbb{R}^2$ entlang der Kurve γ durch die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\nabla v(t)}{dt} &= 0 \\ v(0) &= v_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Man nennt eine Lösung $v(t)$ ein paralleles Vektorfeld entlang γ oder präziser die Parallelverschiebung des Vektors v_0 entlang γ .

- (a) Schreiben Sie (1) aus für die Komponenten von v .
- (b) Vergewissern Sie sich, dass (1) eine lineare Differentialgleichung ist, das heißt für zwei parallele Vektorfelder v, w entlang γ ist auch $\lambda v + \mu w$ parallel, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- (c) Sei v die Parallelverschiebung von v_0 und w die Parallelverschiebung von w_0 . Dann ist für beliebige t

$$g(v(t), w(t)) = g(v_0, w_0)$$