Aufgabe 1

(a) Es sind

$$\begin{aligned} c'(0) &= T \\ c''(0) &= \kappa N \\ c'''(0) &= \kappa' N + \tau B - \kappa T \end{aligned}$$

(b) Die Taylornäherung ist

$$c(t) = c(0) + tT + \frac{\kappa}{2} t^2 N + \frac{t^3}{6}(\kappa' N + \tau B - \kappa T)$$

(c) Man skizziere die Kurven $(t, \frac{\kappa t^2}{2})$, $(t - \frac{\kappa}{6} t^3, \frac{\tau t^3}{6})$ und $(\frac{\kappa t^2}{2} + \frac{t^3 \kappa'}{6}, \frac{\tau t^3}{6})$.

Aufgabe 2

(a) Man sieht aus Aufgabe 1a), dass die ersten beiden Ableitungen von $\tilde{c}$ verschwinden.

(b) Man bestimme die Ableitungen von f

$$\begin{aligned} f'(0) &= \langle c'(0), c(0) - p \rangle \\ f''(0) &= \langle c''(0), c(0) - p \rangle + \langle c'(0), c'(0) \rangle = \langle c''(0), c(0) - p \rangle + 1 \end{aligned}$$

Die Voraussetzung $f'(0) = f''(0) = 0$ führt auf $c(0) - p = -\frac{1}{\kappa} N$. Folglich ist $r = \frac{1}{\kappa}$.

Zum Zusatz: Die Taylornäherung dritter Ordnung bleibt auch in höheren Dimensionen dieselbe. Auch Aufgabe 2 behält in der T, N-Ebene seine Gültigkeit.