Präsenzaufgaben zur Elementare Differentialgeometrie I — SS 07, Serie 2
Dr. M. Simon, S. Krause — 2. Mai 2007

Aufgabe 1 (*Die logarithmische Spirale*) Es sei

$$\gamma \colon t \mapsto \begin{pmatrix} e^{ct}\cos t \\ e^{ct}\sin t \end{pmatrix}, \qquad c > 0$$

(a) Bestimmen Sie die Ableitung $\dot{\gamma}$ und $v = |\dot{\gamma}|$.

(b) Bestimmen Sie den Tangentialvektor und zeigen Sie, dass der Winkel α zwischen dem Ortsvektor und dem Tangentialvektor stets gleichbleibt, also

$$\cos\alpha = \left\langle \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}, \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} \right\rangle = \text{konst.}$$

(c) Welche Bogenlänge hat $\gamma \colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie ferner $s(b)$, die Länge von γ, wenn man den Definitionsbereich $(-\infty, b]$ wählt.

(d) Bestimmen Sie den Normalenvektor und die Krümmung von γ.

(e) Wenn Sie alles richtig gerechnet haben, sollten Sie sehen, dass der Krümmungsradius $\frac{1}{\kappa}$ proportional zur Bogenlänge $s(t)$ ist.

Anmerkung: Diese Spirale erhält tragische Relevanz in der Flugbahn eines Nachtfalters, der den Mond mit einer Kerze verwechselt. Anstatt in konstantem Winkel zum Mond in gerader Flugbahn zu fliegen, dreht er in konstantem Winkel zur Kerze eine letzte logarithmische Spirale.