Lösungen der Präsenzaufgaben

Aufgabe 1

(a) Es ist

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} ce^{ct}\cos t - e^{ct}\sin t \\ ce^{ct}\sin t + e^{ct}\cos t \end{pmatrix}$$

Folglich

$$v(t)^2 = e^{2ct}(c^2\cos^2 t + \sin^2 t + c\sin^2 t + \cos^2 t) = e^{2ct}(c^2+1)$$

(b) Der Tangentialvektor ist

$$T = v^{-1}\dot\gamma = (c^2+1)^{-1/2}\begin{pmatrix} c\cos t - \sin t \\ c\sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

Es ist dann der Kosinus des Winkels α:

$$\left\langle \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{c^2+1}}\begin{pmatrix} c\cos t - \sin t \\ c\sin t + \cos t \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{c(\cos^2 t + \sin^2 t)}{\sqrt{c^2+1}} = \frac{c}{\sqrt{c^2+1}}$$

(c) Die Bogenlänge von γ ist

$$\int_a^b v(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{c^2+1}}\int_a^b e^{ct}\,dt = \frac{e^{cb}-e^{ca}}{c\sqrt{c^2+1}}$$

Für $a \to -\infty$ ergibt sich die endliche Bogenlänge

$$s(b) = \frac{e^{cb}}{c\sqrt{c^2+1}} \tag{1}$$

(d) Die Ableitung des Normalenvektors ist

$$\frac{\partial}{\partial t}T = \frac{1}{\sqrt{c^2+1}}\begin{pmatrix} -c\sin t - \cos t \\ c\cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

Für die Ableitung nach der Bogenlänge müssen wir noch durch $v = \frac{ds}{dt}$ teilen (Kettenregel).

$$\kappa N = e^{-ct}\begin{pmatrix} -c\sin t - \cos t \\ c\cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

Als Betrag ergibt sich die Krümmung

$$\kappa = e^{-ct}\sqrt{c^2+1} \tag{2}$$

(e) Nach (1) und (2) ist

$$\kappa = \frac{1}{cs}$$